UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Corsi di Laurea in Ingegneria

A cura di
Jung Kyu CANCI e Domenico FRENI

Con la collaborazione di
Luciano BATTAIA e Pier Carlo CRAIGHERO

MATEMATICA DI BASE

TEMI D'ESAME

29 agosto 2008

Indice

Premessa iv

Notazioni ed avvertenze v

I Prima parte 1

1 Testi dei temi assegnati dal 28/09/01 al 19/06/06 2

1.1 Prova scritta del 28/9/01 . . . 2
1.2 Prova scritta del 27/9/02 . . . 3
1.3 Prova scritta del 19/9/03 . . . 4
1.4 Prova scritta del 15/11/04 . . . 5
1.5 Prova scritta del 14/3/05 . . . 6
1.6 Prova scritta del 20/6/05 . . . 7
1.7 Prova scritta del 1/9/05 . . . 8
1.8 Prova scritta del 14/10/05 . . . 9
1.9 Prova scritta del 13/3/06 . . . 10
1.10 Prova scritta del 21/4/06 . . . 11
1.11 Prova scritta del 19/6/06 . . . 12

2 Soluzioni e svolgimenti dei temi assegnati dal 28/09/01 al 19/06/06 13

2.1 Prova scritta del 28/9/01 . . . 13
2.2 Prova scritta del 27/9/02 . . . 21
2.3 Prova scritta del 19/9/03 . . . 29
2.4 Prova scritta del 15/11/04 . . . 37
2.5 Prova scritta del 14/3/05 . . . 45
2.6 Prova scritta del 20/6/05 . . . 52
2.7 Prova scritta del 1/9/05 . . . 59
2.8 Prova scritta del 14/10/05 . . . 67
2.9 Prova scritta del 13/3/06 . . . 75
2.10 Prova scritta del 21/04/06 . . . 82
2.11 Prova scritta del 19/6/06 . . . 89

II Seconda parte 99

3 Temi d'esame assegnati dal 01/09/06 al 22/05/08: testi con soluzione breve 100

3.1 Prova scritta del 01/09/06 . . . 100
3.2 Prova scritta del 13/10/06 . . . 101
3.3 Prova scritta del 05/12/06 . . . 103
3.4 Prova scritta del 19/03/07 . . . 105

3.5 Prova scritta del 14/05/07 106
3.6 Prova scritta del 20/07/07 108
3.7 Prova scritta del 5/10/07 109
3.8 Prova scritta del 3/12/07 111
3.9 Prova scritta del 17/03/08 112
3.10 Prova scritta del 22/05/08 114

III Terza parte **116**

A Figure di riferimento **117**

B Raccolta di alcune formule d'uso comune **120**
B.1 Trigonometria 120
B.2 Risoluzione di triangoli rettangoli 122
B.3 Risoluzione di triangoli generici 123
B.4 Il Teorema di Talete 124

Premessa

Questa dispensa di Matematica di base è destinata anzitutto a quegli studenti del 1° anno della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Udine, qualunque Corso di laurea essi abbiano prescelto, i quali si trovino a dover colmare un debito formativo nell'area matematica, rivelatosi in occasione del test di valutazione d'entrata al ciclo di formazione universitaria.

Ma essa sarà anche una assai utile palestra per quegli studenti che, pur non avendo dimostrato rilevanti lacune, intendono prepararsi agli impegnativi corsi di Matematica che li attendono, con un robusto ripasso delle nozioni di base, proposto dagli stessi docenti che li avranno come allievi, evitando quindi di temporeggiare indugiando in attesa passiva, con il rischio di trovare poi inaspettatamente duro l'impatto con l'insegnamento universitario, che ha livelli e ritmi inusitati per chiunque provenga dal ciclo di istruzione media.

A tutti auguriamo di trarre il miglior profitto da questa raccolta di problemi di matematica: impegnarsi a studiarne la risoluzione e a risolverli è il miglior rodaggio per un giovane che aspiri a diventare un apprezzato ingegnere.

La dispensa consta di due parti.

- La prima contiene i testi e le risoluzioni complete delle prove scritte di Matematica di base tenute dal 28/9/2001 al 19/6/2006 ed è a cura dei professori Jung Kyu Canci e Domenico Freni.

- La seconda contiene i testi e le soluzioni in breve delle prove scritte tenute dall'1/9/2006 in poi, ed è a cura dei professori Luciano Battaia e Pier Carlo Craighero.

Una breve appendice contiene alcune delle formule spesso usate nella risoluzione dei problemi.

Infine, gli autori ringraziano chiunque voglia, con pertinenti osservazioni, contribuire al miglioramento di questa dispensa. Si prega di mandare una e-mail a uno dei seguenti indirizzi

- batmath@gmail.com

- canci@dimi.uniud.it

- freni@dimi.uniud.it

Notazioni ed avvertenze

- Con $\mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali, con $\mathbb{Z}$ quello degli interi relativi, con $\mathbb{Q}$ quello dei razionali, infine con $\mathbb{R}$ denotiamo quello dei numeri reali.
- Dato un polinomio a coefficienti reali $P(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$, ogni numero $a \in \mathbb{R}$ tale che $P(a) = p_n a^n + \ldots + p_1 a + p_0 = 0$ verrà chiamato uno *zero* o una *radice* del polinomio $P(x)$.
- Sia $P(x)$ un polinomio $P(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ dove n massimo intero per cui p_n è non nullo. Tale intero n si definisce il grado del polinomio e si denota con $\deg(P)$.
- Capiterà che dovremo usare il *Principio Di Identità Tra Polinomi* il quale afferma che dati due polinomi dello stesso grado[1] $P(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ e $Q(x) = q_n x^n + \ldots + q_1 x + q_0$ sono uguali se e solo se $p_i = q_i$ per ogni indice $0 \leq i \leq n$.
- Capiterà di usare la classica notazione della teoria degli insiemi. Per esempio $\cup$, $\cap$, $\forall$, ed $\exists$ sono simboli per scrivere *unione*, *intersezione*, *per ogni* ed *esiste*, rispettivamente.
- Gli intervalli limitati di $\mathbb{R}$ verranno espressi con i simboli $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ e $[a, b]$ che rappresenteranno gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, rispettivamente. Ogni tanto useremo anche una notazione del tipo $\{a < x < b\}$ che si intenderà un'abbreviazione di $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- Gli intervalli illimitati verranno rappresentati con i simboli uguali a quelli limitati usando il simbolo di infinito ∞. Per esempio $]-\infty, a[$ rappresenterà l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$. Chiaramente, considerando come insieme ambiente $\mathbb{R}$, non ha alcun significato una notazione tipo $[-\infty, a[$ perché sia $-\infty$ che $+\infty$ non appartengono a $\mathbb{R}$.
- Il segmento non orientato di estremi A e B sarà denotato con $\overline{AB}$. In presenza di un'unità di misura, si indicherà con $|\overline{AB}|$ la misura del segmento $\overline{AN}$.
- Di norma gli angoli saranno denotati con la scrittura $A\widehat{B}C$, mentre la loro misura con $\widehat{B}$.
- Il simbolo M.C.D.(n, m) rappresenterà il massimo comun divisore di due numeri interi n e m. Ove non si creasse ambiguità con altre notazioni, il suddetto massimo comun divisore potrebbe essere denotato semplicemente con (n, m). Il minimo comune multiplo verrà denotato con il simbolo m.c.m.(n, m).
- Nello svolgimento di un tema d'esame troverete molte figure. Quasi tutte non sono necessarie perché quasi sempre per ottenere un risultato preciso a un quesito (anche se rappresentabile con figura) bisogna risolverlo per via analitica. Però una rappresentazione grafica può risultare comoda da molti punti di vista: per esempio spesso saperla fare e interpretare correttamente aiuta a capire se i risultati ottenuti per via analitica sono corretti. A questo livello non è richiesto il dover fare molti dei grafici che incontrerete, infatti solo chi ha già visto come si fanno gli studi di funzione sarebbe in grado di disegnarli. Occorre anche tenere presente che i grafici potrebbero essere rappresentati in

[1] Se non hanno lo stesso grado non possono essere uguali.

un piano cartesiano in cui l'asse x e l'asse y hanno due misurazioni diverse. Per esempio potrebbe capitare che un centimetro sull'asse x rappresenta una unità e invece sull'asse y ne rappresenta 2.

- Nei primi cinque svolgimenti abbiamo risolto tutte le disequazioni da un punto di vista geometrico. In pratica, di fronte a disequazioni del tipo $ax+b > 0$ o $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$, abbiamo analizzato la retta o la parabola associata. Questo ha comportato il fare tutta una serie di figure che chiaramente non sarà richiesto in sede d'esame. È però richiesto che uno studente conosca una tale interpretazione geometrica. Il modo standard, richiesto in sede d'esame, è quello che fa uso dei diagrammi, metodo che verrà usato nelle risoluzioni dal tema del 20/06/05 in poi. Tali diagrammi sono stati disegnati usando dei codici Matlab gentilmente forniti dal prof. Fabio Maria Antoniali.

- **Esempi di diagrammi**

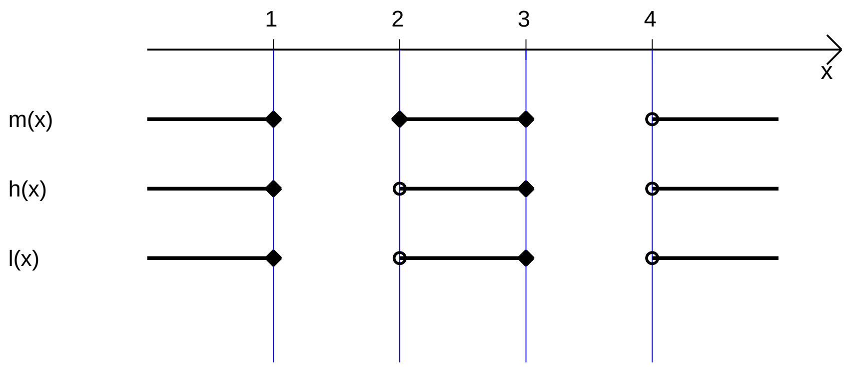


Diagramma di intervalli

Questo diagramma va letto nel seguente modo:

la proposizione $m(x)$ è vera in $]-\infty, 1] \cup [2, 3] \cup]4, +\infty[$,

la proposizione $h(x)$ è vera in $]-\infty, 1] \cup]2, 3] \cup]4, +\infty[$,

la proposizione $l(x)$ è vera in $]-\infty, 1] \cup]2, 3] \cup]4, +\infty[$;

cioè se in un estremo c'è il rombo nero allora l'estremo appartiene all'intervallo. Se in un estremo c'è il cerchietto allora l'estremo non appartiene all'intervallo.

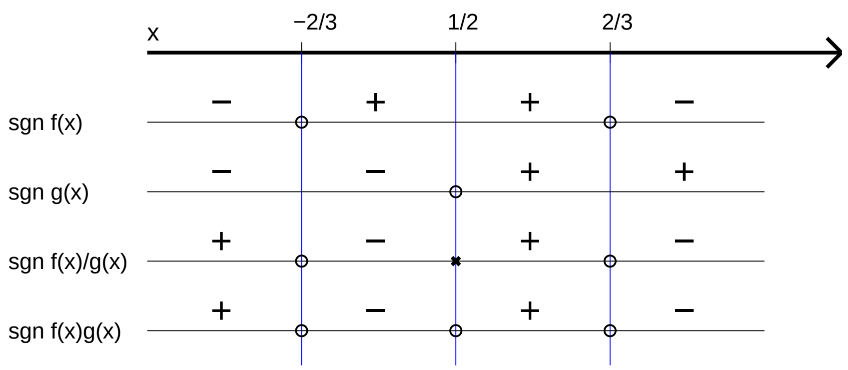


Diagramma di segno

In questo caso il diagramma va letto così :

$$f(x) < 0 \text{ in }]-\infty, -2/3) \cup]2/3, +\infty[\text{ e } f(x) \geq 0 \text{ in } [-2/3, 2/3],$$
$$g(x) < 0 \text{ in }]-\infty, 1/2[\text{ e } g(x) \geq 0 \text{ in } [1/2, +\infty[,$$

$$f(x)/g(x) < 0 \text{ in }]-2/3, 1/2[\cup]2/3, +\infty[\text{ e } f(x)/g(x) \geq 0 \text{ in }]-\infty, -2/3] \cup]1/2, 2/3],$$

$$f(x) \cdot g(x) < 0 \text{ in }]-2/3, 1/2[\cup]2/3, +\infty[\text{ e } f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ in }]-\infty, -2/3] \cup [1/2, 2/3];$$

cioè i pallini indicano dove le funzioni si annullano e le croci dove le funzioni non sono definite.

Parte I

Temi d’esame dal 28/09/01 al 19/06/06

Testi e soluzioni

1 Testi dei temi

1.1 Prova scritta del 28/9/01

1. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti relazioni è vera

$$\text{(a)}\ \sqrt{7}-\sqrt{5} > \sqrt{5}-\sqrt{3}, \quad \text{(b)}\ \sqrt{7}-\sqrt{5} = \sqrt{5}-\sqrt{3}, \quad \text{(c)}\ \sqrt{7}-\sqrt{5} < \sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

2. Ridurre ai minimi termini le frazioni

$$\text{(a)}\ \frac{2x^2-x-1}{1-4x^2} \qquad \text{(b)}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-6x^2+12x-8}$$

dopo aver calcolato il dominio.

3. Si considerino le funzioni

$$f(x) = 4-9x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 1-3x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver risolto le disequazioni

$$f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(x) < 0,$$

utilizzare i risultati ottenuti, quando occorrono, per risolvere le seguenti disequazioni

$$\text{(a)}\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \qquad \text{(b)}\ f(x)\cdot g(x) \leq 0 \qquad \text{(c)}\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

4. Risolvere le disequazioni

$$\text{(a)}\ \left|\frac{5}{2+x}\right| \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)}\ |1+2x| \leq -x.$$

5. Risolvere

l'equazione (a) $\sqrt{2-2x}-3 = x$ e la disequazione (b) $\sqrt{4-9x^2} < 2(1-3x)$.

6. Risolvere

l'equazione (a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$ e la disequazione (b) $2\sin 2x + 1 > 0$.

7. Trovare l'equazione della retta passante per i punti $O(0,0)$ e $P(3, \sqrt{3})$ e calcolare l'angolo che essa forma con il semiasse positivo delle x. Verificare poi che tale angolo soddisfa l'equazione

$$2\cos^2 x = 5\sin x - 1.$$

8. Trovare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(4,-3)$ e $B(-2,1)$.

9. In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il segmento $\overline{AB}$ di lunghezza 6; il punto A appartiene al semiasse positivo delle y e le coordinate di B sono $(t,0)$ essendo $t \geq 0$. Si scrivano le equazioni parametriche del luogo geometrico descritto dal punto medio del segmento $\overline{AB}$ al variare del parametro t nell'intervallo $[0,6]$. Dedurre, infine, l'equazione cartesiana di tale luogo geometrico, descriverne il tipo e tracciarne il grafico.

10. Di un triangolo ABC si sa che $\widehat{A} = 80°$, $\hat{B} = 70°$ e $AB = 20$. Determinare gli altri elementi del triangolo.

1.2 Prova scritta del 27/9/02

Per tutti gli esercizi, dopo avere accuratamente esplicitato su foglio protocollo le giustificazioni o le risoluzioni, riportare i risultati nelle tabelle. (I risultati non giustificati non saranno presi in considerazione)

1. Stabilire l'ordine (<=>) fra i seguenti numeri reali

(a)	$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$
(b)	$2^{10}+2^{10}$		2^{11}
(c)	3^{3^3}		$(3^3)^3$
(d)	$\log_2 \frac{3}{2}$		$\log_2 \frac{1}{4}$
(e)	$\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 3$		$\log_{\frac{1}{3}} 2$

2. Semplificare la frazione algebrica e indicarne il dominio

$\frac{x^4-x^2}{2x^3-3x^2-5x+6} =$	Dominio=

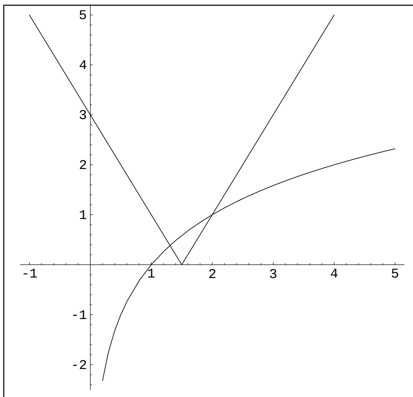
3. Risolvere le equazioni

	equazioni	soluzioni
(a)	$\sqrt{x^2-6x} = -1$	
(b)	$\sqrt{x+6} = -x$	
(c)	$\sin 2x - \sin x = 0$	

4. Risolvere le disequazioni

	disequazioni	soluzioni
(a)	$\lvert x^2-3\rvert < 1$	
(b)	$\sqrt{1-x}+1 > \frac{2x}{\sqrt{1-x}}$	
(c)	$\frac{1-2\sin x}{1-\cos x} > 0$	

5. Questo grafico corrisponde alla risoluzione grafica di una equazione. Scegli l'equazione tra quelle proposte a fianco:



$\log_3 x = |x - 3|$
$\log_2 x = |2x - 3|$
$2^x = |3 - x|$
$\log_2 x = 3 - 2x$

6. Dato il triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(6, 9)$ e $C(3, 12)$, trovare il suo baricentro G.
Trasformare il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$ con l'affinità $f\colon (x, y) \to (4x, 5y)$.
Trovare infine il baricentro G' del triangolo $A'B'C'$ e verificare che $f(G) = G'$.

7. Consideriamo un triangolo di lati a, b e c opposti rispettivamente agli angoli α, β e γ. Calcolare a e b sapendo che $c = 1$, $\alpha = 2\beta$ e $\cos\alpha = 2/5$.

8. Trasformare in forma cartesiana la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -4t^2 + 12t - 5, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Specificare di che curva si tratta, rappresentarla graficamente e scrivere le equazioni delle rette tangenti ad essa passanti per il punto $(0, 4)$.

1.3 Prova scritta del 19/9/03

Per tutti gli esercizi, dopo avere accuratamente esplicitato su foglio protocollo le giustificazioni o le risoluzioni, riportare i risultati nelle tabelle. (I risultati non giustificati non saranno presi in considerazione)

1. Dato un numero reale $a > 1$, mettere in ordine crescente i seguenti numeri ponendo nella stessa casella gli eventuali numeri uguali

$a\sqrt[3]{a}$	$a^{2/5}$	$a^2\sqrt{a}$	$a^{1/3}$	$\sqrt{\sqrt{a}}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a^5}$	$\sqrt[4]{a}$

2. Cosa significa che una strada ha una pendenza del 16%? E del 100%?

3. Se la somma di due numeri è uguale a 1, dimostrare che la loro differenza coincide con la differenza dei loro quadrati.

4. Tracciato il grafico della funzione $f(x) = \sin x$, dedurre da esso il grafico della funzione $g(x) = |\sin x| - 1$.

5. Semplificare la frazione algebrica

$$\frac{\dfrac{9y^2}{3y-2x}-3y}{2x} : \frac{3y}{2x+\dfrac{9y^2}{2x-3y}}$$

6. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare le frazioni algebriche

(a)	$\dfrac{x^2+x}{-2x^2} =$	Dominio=
(b)	$\dfrac{2x^3+5x^2-33x+20}{(2x-5)(x-1)} =$	Dominio=

7. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

	equazioni/disequazioni	soluzioni
(a)	$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3+\sqrt{2x-1}}$	
(b)	$\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right) = \sin 3x$	
(c)	$\sqrt{\lvert 1-x^2\rvert} < x+1$	
(d)	$\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}} > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
(e)	$2\lvert\cos x\rvert > \sqrt{3}$	

8. Rispetto ad un sistema di riferimento Oxy, determinare l'equazione del luogo dei punti $P(x,y)$ la cui distanza dal punto $O(0,0)$ è doppia della distanza dal punto $A(1,0)$ e infine rappresentarlo graficamente.

9. Consideriamo un triangolo di lati a, b e c opposti rispettivamente agli angoli α, β e γ. Calcolare a e b sapendo che $c = 2$, $\alpha+\beta = \pi/3$ e $\sin\alpha = 1/4$.

10. Determinare il valore dei parametri a e b in modo che il polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$$

ammetta $x = 1$ come radice doppia e poi scomporlo in fattori.

1.4 Prova scritta del 15/11/04

Risolvere al più 8 tra i seguenti esercizi.

1. (a) Scomporre in fattori il polinomio $P(a) = -a^2 + 2a - 1$.

(b) Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$\frac{x^3-2x^2-5x+6}{9-6x+x^2}.$$

2. (a) Sia assegnata l'equazione $x + 3m = 7$. Per quali valori di m la soluzione è $x = \sqrt{2}$?

(b) Risolvere la disequazione $|x^2 - x| - 9 \leq 0$.

3. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 2.$$

4. (a) Semplificare la rappresentazione del numero

$$c = \left(\sqrt{19} - \sqrt{51}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{19^{\frac{1}{2}} + \sqrt{51}}.$$

(b) Dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale.

5. Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + x + 1$.

6. Nel piano cartesiano Oxy siano dati la retta r di equazione $x = 1$ ed il punto $A(2, 0)$. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano per cui $|\overline{PA}| = \sqrt{2} \cdot |\overline{PH}|$ essendo $|\overline{PH}|$ la distanza tra il punto P e la retta r. Rappresentare graficamente il luogo ottenuto.

7. Nel piano cartesiano Oxy trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per i punti $A(-1, -1)$, $B(-3, 1)$ e $C(-2, 3)$. Tracciarne il grafico.

8. Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ trovare le equazioni delle tangenti passanti per il punto $A(0, 2)$.

9. In un triangolo ABC si ha $|\overline{AC}| = a$, $|\overline{BC}| = 2a$ e $A\hat{C}B = \frac{2}{3}\pi$. Calcolare $|\overline{AB}|$ e trovare il raggio r della circonferenza circoscritta.

10. (a) Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin x - 1 - \cos x > 0$.

(b) Per quali valori di x la funzione $f(x) = \pi \sin \frac{x}{2}$ assume valore minimo?

1.5 Prova scritta del 14/3/05

1. Scomporre in fattori il polinomio $P(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ e usare la scomposizione ottenuta per semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 + x - 2}$$

dopo averne stabilito il dominio.

2. Risolvere l'equazione

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x.$$

3. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2|x|}{|x| - 1} > -2.$$

4. Semplificare la rappresentazione del numero

$$c = \left(6^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{12} + 4^{\frac{1}{3}}}.$$

5. Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 - x + 1$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + bx + 2$.

6. Siano r e s due rette tra loro ortogonali. Un segmento $\overline{AB}$ di lunghezza l ha l'estremo A che scorre su r e B su s. Rispetto ad un conveniente sistema di riferimento Oxy, si determini l'equazione della curva tracciata dal punto medio P di $\overline{AB}$.

7. Rispetto ad un sistema di riferimento Oxy cartesiano ortogonale, scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(1,4)$ e $B(-2,1)$ e avente il centro sulla retta di equazione $3x - y + 4 = 0$.

8. Per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ il punto $A(-1, b)$ (in un sistema di riferimento Oxy cartesiano ortogonale) determina con l'origine O una retta parallela alla retta di equazione $2x - y + \sqrt{3} = 0$? Calcolare poi la distanza tra le due rette.

9. In un triangolo ABC la mediana $\overline{AM}$ relativa al lato $\overline{BC}$ ha lunghezza 1, $\alpha = M\hat{A}C = \pi/12$ $\left(\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $\beta = A\hat{M}B = \pi/3$. Calcolare la lunghezza di $\overline{AB}$.

10. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x < 2.$$

1.6 Prova scritta del 20/6/05

Risolvere al più otto tra i seguenti esercizi.

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^3 - 1}.$$

2. Risolvere l'equazione

$$2\sin^2 x = \operatorname{tg} x.$$

3. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{6-x}.$$

4. Stabilire, giustificando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{x-1}{x-6} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 \leq x - 6 \\ x - 6 \neq 0 \end{cases}.$$

5. Dimostrare che se $1 \leq x \leq 2$ allora l'espressione $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ è identicamente uguale a 2.

6. Scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$$

e passanti per l'origine. Calcolare inoltre l'area del parallelogramma con i lati tangenti alla circonferenza e paralleli alle due rette.

7. Un quadrato ed un esagono regolare hanno la stessa area. Quale dei due poligoni ha il maggior perimetro? Giustificare la risposta.

8. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $A(0,3)$ e formante un angolo di $2\pi/3$ con il semiasse positivo delle x.

9. In un parallelepipedo rettangolo a base quadrata lo spigolo di base e l'altezza misurano 12 e 20. Trovare la tangente dell'angolo α che una diagonale del parallelepipedo forma con il piano della base. Calcolare anche $\sin 2\alpha$.

10. Risolvere la disequazione

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x + 4 \leq 4(\sin^2 2x + \cos^2 2x).$$

1.7 Prova scritta del 1/9/05

Risolvere al più otto tra i seguenti esercizi.

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}.$$

2. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 2x > 0.$$

3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\cos x \cos y = 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x-3}.$$

5. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$|x-2| - 2|x+1| < 1.$$

6. Trovare due numeri reali x_1 e x_2 tali che la loro somma è pari al loro prodotto moltiplicato per $2\sqrt{2}$ e la somma dei lori quadrati vale 10.

7. Determinare il raggio di base x e l'altezza y di un cono la cui superficie totale è uguale a quella di una sfera di raggio R e il cui volume è uguale a quello di un'altra sfera di raggio $r = 1$. Discutere rispetto a R l'esistente di soluzioni e trovarle.

8. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = R^2$. Trovare il luogo geometrico dei punti P del piano tali che

$$3|\overline{PT}|^2 = |\overline{PS}|^2,$$

dove T è il punto di contatto con γ della retta tangente passante per P e S è l'intersezione con l'asse x della retta per P parallela all'asse y.

9. Dato un triangolo rettangolo di cateti a e b e ipotenusa c, dimostrare che

$$a = (b + c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

dove α è l'angolo opposto al cateto a.

10. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, scrivere l'equazione della circonferenza γ di raggio 1, tangente agli assi e contenuta nel primo quadrante. Scrivere l'equazione della retta passante per P e Q, con $P, Q \in \gamma$, tale che la corda $\overline{PQ}$ ammette il punto $A\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ come punto medio. Detta B l'intersezione tra la secante PQ e l'asse x, costruire un quadrato equivalente al rettangolo $\overline{BP} \times \overline{BQ}$.

1.8 Prova scritta del 14/10/05

Risolvere al più otto tra i seguenti esercizi.

1. Sia a un numero reale maggiore di 1. Ordinare in modo crescente i seguenti numeri

$$\left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23} \;;\; \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \;;\; \frac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} \;;\; \frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}}.$$

2. Risolvere la seguente disequazione in $\mathbb{R}$

$$4|x^2 - x| \geq 1.$$

3. Semplificare la seguente espressione dove $a \neq b$ e $\alpha \neq k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\dfrac{(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)} - \dfrac{2ab\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{a\cos(8\pi) + b\sin\left(\dfrac{7}{2}\right)}.$$

4. Stabilire per quali valori dei coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente polinomio

$$P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$$

ammette $x = -1$ come radice doppia.

5. Razionalizzare il denominatore della frazione

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

e trovare le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$$(1+\cos x)^2 = (7+4\sqrt{3})\sin^2 x.$$

6. Risolvere la seguente disequazione nell'intervallo $[0, 2\pi]$

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x \leq \sqrt{3}.$$

7. Del quadrilatero $ABCD$ si sa che

(a) $|\overline{AB}| = 2|\overline{BC}| = 4|\overline{CD}| = 4l$,

(b) $A\hat{B}C = 2\pi/3$ e $B\hat{C}D = \pi/2$.

Calcolare, in funzione di l, $|\overline{AC}|$, $|\overline{BD}|$, il coseno di $D\hat{B}A$ e quindi $|\overline{DA}|$.

8. Nel piano cartesiano Oxy un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{BC}$, circoscritto alla circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,$$

ha l'angolo $B\hat{A}C$ di $\pi/4$ e i vertici A e B sulla retta r di equazione $x = -1$, con A nel semipiano $y < 0$. Trovare le coordinate di A e la misura dell'altezza h relativa alla base $\overline{BC}$.

9. Disegnare nel piano cartesiano Oxy le due rette parallele

$$r:\ 4x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad s:\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Dato il punto $P_0(2,1) \in s$, determinare le coordinate dei vertici dei quadrati che hanno un vertice in P_0 e due lati sulle rette r e s.

10. Nel piano cartesiano Oxy sono dati i punti $A(0,1)$ e $B(2,1)$. Al variare del punto P sulla retta $y = -1$, l'ortocentro (il punto di incontro delle altezze) del triangolo ABP descrive una curva. Trovarne l'equazione e disegnarla.

1.9 Prova scritta del 13/3/06

Risolvere al più otto tra i seguenti esercizi.

1. Siano a e b due numeri reali distinti non entrambi nulli e $\alpha \neq k\pi/2$ per ogni k intero.

$$\frac{\dfrac{(a^3-b^3)\,\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}+\dfrac{3ab(a-b)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{a^2+b^2\cos(6\pi)+2ab\sin\left(\dfrac{11}{2}\right)}.$$

2. Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\sin 3x - \sin x - (2\cos^2 x - 1) = 0.$$

3. Dato il polinomio

$$P(x) = x^2 + (2\lambda - 1)x + 3 - 5\lambda,$$

per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto?

4. Dati i polinomi

$$f(x) = 9 - 4x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 1,$$

risolvere le disequazioni

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad , \quad f(x)g(x) \geq 0 \quad , \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

5. Semplificare l'espressione

$$f(x) = \left(\frac{\dfrac{2x}{x^3-3}+1}{\dfrac{x^3-3}{2x}+1}+1\right) : (x^2+x+3)$$

fino a ridurla ad una frazione razionale ridotta ai minimi termini.

6. Risolvere la seguente disequazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2-1} > x+2.$$

7. Le misure $a = |\overline{BC}|$ e $b = |\overline{AC}|$ di due lati di un triangolo ABC soddisfano le due relazioni

$$a + b = 7 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{7}{12} \quad \text{e} \quad b > a,$$

inoltre $\sin\alpha = 3/5$ essendo $\alpha = B\hat{A}C$. Supponendo che $\overline{AB}$ sia il lato maggiore, calcolare le misure di tutti i lati del triangolo e dire di che tipo di triangolo si tratta[1].

[1]Rispetto al testo originario, questo esercizio è stato un po' modificato.

8. Nel piano cartesiano Oxy trovare le rette tangenti comuni alle circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

9. Dati la retta r di equazione $2x + y - 1 = 0$ e il punto $P(2, 3)$, trovare il punto P' simmetrico di P rispetto ad r.

10. Dati il punto $P(1, 2)$ e la parabola di equazione $y = x^2$, determinare

(a) l'equazione del fascio di rette di centro P,

(b) il luogo geometrico dei punti medi delle corde determinate dall'intersezione della parabola con le rette del fascio.

1.10 Prova scritta del 21/4/06

Risolvere al più otto tra i seguenti esercizi.

1. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $\sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20}(2^3)^7}}$, $2\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\dfrac{4\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$.

2. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$, della seguente equazione trigonometrica

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin(\pi + 3x) = 0.$$

3. Determinare i valori di a e b tali che il polinomio

$$P(x) = x^4 + bx^3 + (a + b)x^2 + 5x - b$$

sia divisibile per $x^2 + x + 3$.

4. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{3x^2 - 8x + 9} + 2x > 3.$$

5. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema non ammette soluzioni?

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 8x + 9} + 2x > 3 \\ x^2 - 2kx + k^2 - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

6. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{R}$.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = \frac{x^3}{2x^2 - x - 1}.$$

7. Risolvere la seguente disequazione trigonometrica

$$\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}\sin^2 \frac{x}{2}} > 0.$$

8. Nel quadrilatero $ABCD$ gli angoli $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ misurano rispettivamente $\pi/3$, $\pi/2$ e $7\pi/12$; inoltre i lati $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ misurano entrambi $l\sqrt{2}$. Determinare le misure delle diagonali e il perimetro del quadrilatero.

9. Dati i punti $A(1, 2)$ e $B(7, 5)$, determinare le coordinate dei punti P e Q che dividono il segmento $\overline{AB}$ in tre parti uguali.

10. Sono dati punti $A(-2,-1)$, $B(-5/2, 25/4)$ e la parabola di equazione $y = x^2$. Trovare i punti P della parabola tali che il triangolo ABP sia rettangolo in P.

1.11 Prova scritta del 19/6/06

1. Semplificare la rappresentazione del seguente numero

$$n = \sqrt[12]{\sqrt[3]{5}-1}\cdot\left(5^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{5}+1\right)^{\frac{1}{12}} : \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1}.$$

2. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[-2\pi, \pi/2]$, della seguente equazione trigonometrica

$$\sin(\pi + x) + 2\sin x\cos x = 2\cos^2 x - \cos x.$$

3. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni?

$$\begin{cases} (x+1)^2(x^2-6x+9) \leq 0 \\ kx^2 - 2\sqrt{k}x + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2k - 1$ ha una radice doppia? Per ogni valore trovato scomporre il polinomio in fattori.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$||x-1|-2| \leq 2x + 3.$$

6. Risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione seguente:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3}.$$

7. Risolvere la seguente disequazione trigonometrica

$$\frac{\cos 4x + \sin 3x - \cos 2x}{\operatorname{tg} x - 1} \geq 0.$$

8. Dati i punti $A(4/3, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-3, 0)$ e $D(-5/3, -2)$, verificare che il quadrilatero $ABCD$ è un rettangolo. Inoltre, determinare le equazioni delle rette, parallele al lato $\overline{AD}$, che dividono il rettangolo $ABCD$ in tre rettangoli aventi la stessa area.

9. Sono date le due parabole di equazione $y = x^2$ e $x = y^2$. Se A e B sono i punti di incidenza delle parabole con la loro tangente in comune, determinare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1)$.

10. Nel trapezio $ABCD$ la base maggiore $\overline{AB}$ è lunga $3l$, la base minore $\overline{CD}$ misura $(3-\sqrt{3})l$, la diagonale $\overline{AC}$ forma con la base maggiore un angolo di ampiezza $\pi/4$ e con il lato obliquo $\overline{AD}$ un angolo di $\pi/12$. Determinare le misure di $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$ e l'area del trapezio.

2 Soluzioni e svolgimenti

2.1 Prova scritta del 28/9/01

1. La risposta corretta è la (c) infatti:

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} < \sqrt{5} - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{7} + \sqrt{3} < 2\sqrt{5}.$$

Nella seconda disuguaglianza entrambi i termini sono positivi e quindi elevando al quadrato si ottiene che

$$\sqrt{7} + \sqrt{3} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 7 + 3 + 2\sqrt{21} < 20$$[1].

Questa ultima disuguaglianza è verificata se e solo se $2\sqrt{21} < 10$ che equivale[2] a scrivere che $84 < 100$ che è ovviamente vero.

2. (a) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{1 - 4x^2}$

Osserviamo che il polinomio $1 - 4x^2$ si fattorizza in $1 - 4x^2 = (1 - 2x)(1 + 2x)$. Infatti, in generale vale l'identità $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Perciò il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 4x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/2\}$

Il polinomio $2x^2 - x - 1$ si annulla in 1 e $-1/2$ e quindi si fattorizza, per il teorema di Ruffini, in $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x + 1/2) = (x - 1)(2x + 1)$; si ottiene così la seguente identità tra funzioni razionali

$$\frac{2x^2 - x - 1}{1 - 4x^2} = \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(1 - 2x)(1 + 2x)} = \frac{x - 1}{1 - 2x}$$

che vale solo per $x \in D$.

(b) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

Utilizzando la formula per il cubo di un binomio $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ con $a = x$ e $b = -2$ otteniamo $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$. Quindi il dominio è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Il polinomio $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ si annulla in 2 e quindi, per il teorema di Ruffini, è divisibile da $x - 2$ e con i seguenti facili calcoli

	+1	-72	+16	-12
2		+2	-10	+12
	+1	-5	+6	//

deduciamo che si fattorizza in $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$. Ricordando che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$, si deduce immediatamente $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$. Quindi si ottiene la seguente identità tra funzioni razionali

[1] Abbiamo usato la formula $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

[2] Di nuovo si ha l'equivalenza perché $2\sqrt{21}$ e 10 sono entrambi positivi.

$$\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-6x^2+12x-8}=\frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-2)^3}=\frac{x-3}{x-2}$$

che vale solo per $x \in D$.

3. Il grafico della funzione $f(x) = 4-9x^2$ è la parabola rappresentata nella Figura 2.1. Usando, in modo opportuno, il prodotto notevole $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, si ottiene che $f(x)=(2-3x)(2+3x)$ e quindi la f si annulla in $x=\pm 2/3$. Essendo il coefficiente di x^2 negativo, l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \geq 0$ è l'intervallo limitato $[-2/3, 2/3]$.

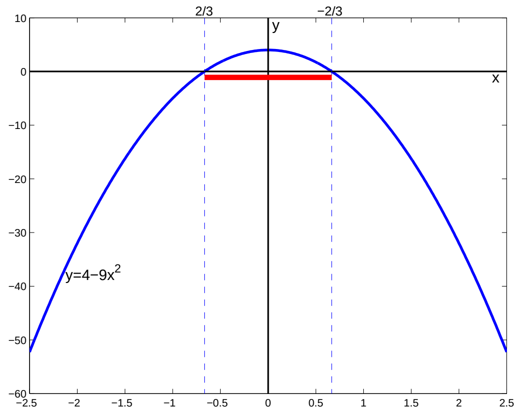


Figura 2.1: $f(x) = 4-9x^2 \geq 0$

N.B. Capire qual è il grafico della funzione permette di controllare il risultato della disequazione, risultato che si può ottenere in modo preciso solo per via analitica (cioè facendo rigorosamente i calcoli).
Invece il grafico della funzione $g(x) = 1-3x$ è la retta rappresentata nella Figura 2.2. L'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che $g(x) < 0$ è l'intervallo illimitato $]1/3, +\infty[$.

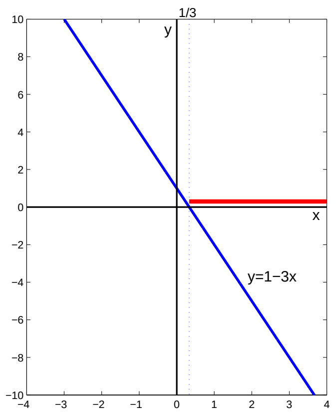


Figura 2.2: $g(x) = 1-3x < q0$

Esprimiamo la retta reale nel seguente modo

$$\mathbb{R} =]-\infty, -2/3[\cup\{-2/3\}\cup]-2/3, 1/3[\cup\{1/3\}\cup]1/3, 2/3[\cup\{2/3\}\cup]2/3, \infty[$$

e analizziamo i seguenti sei casi

1. Caso $x \in]-\infty, -2/3[$. Si ha $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$
2. Caso $x = -2/3$. Si ha $f(x) = 0$ e $g(x) > 0$
3. Caso $x \in]-2/3, 1/3[)$.Si ha $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$
4. Caso $x = 1/3$. Si ha $f(x) > 0$ e $g(x) = 0$
5. Caso $x \in]1/3, 2/3[$. Si ha $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$
6. Caso $x = 2/3$. Si ha $f(x) = 0$ e $g(x) < 0$
7. Caso $x \in]2/3, \infty[$. Si ha $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

La situazione è rappresentata dal diagramma riportato nella Figura 2.3

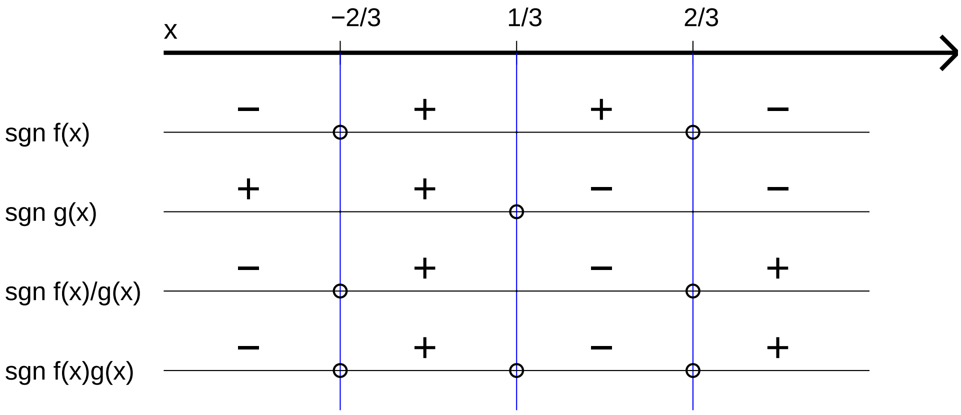


Figura 2.3: Segno di $f(x)$ e $g(x)$

(a) La funzione $f(x)/g(x)$ non è definita in $x = 1/3$ e dalla precedente analisi dei sette casi si deduce che $f(x)/g(x) \leq 0$ se e solo se $x \in]-\infty, -2/3] \cup]1/3, 2/3]$.

(b) $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ se e solo se $x \in]-\infty, -2/3] \cup [1/3, 2/3]$.

(c) Infine dalla tabella delle soluzioni delle disequazioni $f(x) < 0$ e $g(x) \geq 0$ deduciamo che il sistema $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ è soddisfatto in $]-\infty, 2/3[$ come risulta dal diagramma degli intervalli rappresentato nella Figura 2.4

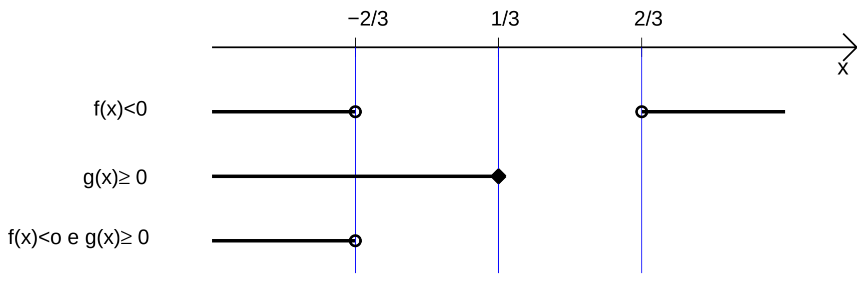


Figura 2.4: Es. 3 del 28/9/01

4. (a) $\left|\dfrac{5}{2+x}\right| > 1.$

Chiaramente la disequazione ha senso se e solo se $x \neq -2$. Essendoci il valore assoluto dobbiamo considerare i due casi $5/(2+x) > 0$ e $5/(2+x) < 0$. Per nessun valore reale x si ha $5/(2+x) = 0$

Caso $5/(2+x) \geq 0$. Accade se e solo se $x+2>0$ ovvero $x>-2$. In questa situazione la disequazione diventa

$$\frac{5}{2+x} > 1.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $x+2$ otteniamo $5 > 2+x$, il senso della disequazione rimane immutato perché siamo nel caso $x+2>0$, e quindi in questa situazione la soluzione è $-2<x<3$.

Caso $5/(2+x) < 0$. Equivalente a $2+x<0$ ovvero $x<-2$. La disequazione diventa

$$-\frac{5}{2+x} > 1.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $x+2$ otteniamo $-5 < 2+x$, il senso della disequazione cambia perché siamo nel caso $x+2<0$, in questo caso la soluzione è $-7<x<-2$.

In generale, su tutta la retta reale, le soluzioni sono rappresentate dall'insieme $]-7,-2[\cup]-2,3[$. La situazione è rappresentata dalla Figura 2.5.

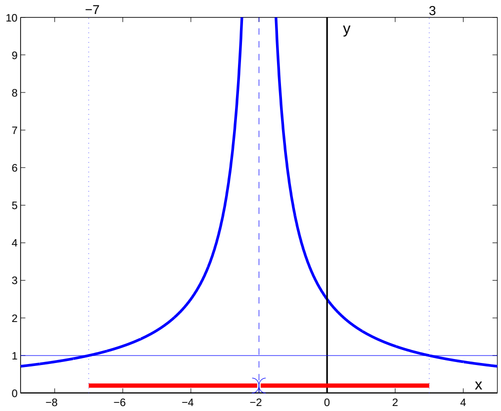


Figura 2.5: $\left|\dfrac{5}{2+x}\right| > 1$

(b) $|1+2x| \leq -x$

Anche per lo studio di questa disequazione dobbiamo considerare due casi.

Caso $1+2x \geq 0$. Accade se e solo se $x \geq -1/2$. La disequazione diventa $1+2x \leq -x$ che è verificata per ogni $x \leq -1/3$. Quindi in questo caso le soluzioni sono le $x \in]-\infty,-1/3[\cap]-1/2,+\infty[=]-1/2,-1/3[$.

Caso $1+2x<0$. Accade se e solo se $x<-1/2$. La disequazione diventa $-1-2x \leq -x$ che è verificata per ogni $x \geq -1$. Quindi in questo caso le soluzioni sono le $x \in]-\infty,-1[\cap]-\infty,-1/2[=]-\infty,-1/2[$.

Facendo l'unione delle soluzioni ottenute con lo studio nei due casi, tra di essi complementari, si ricava che l'insieme delle soluzioni della disequazione (b) sono tutte e sole le x che stanno in

$$[-1,-1/2[\cup[-1/2,-1/3] = [-1,-1/3].$$

La situazione è rappresentata nella Figura 2.6

5. (a) $\sqrt{2-2x}-3 = x$.

Il dominio di definizione dell'equazione è $2-2x \geq 0$ ovvero $x \leq 1$. Chiaramente le soluzioni sono da ricercare nell'intervallo $[-3,+1]$. Infatti l'equazione (a) diventa

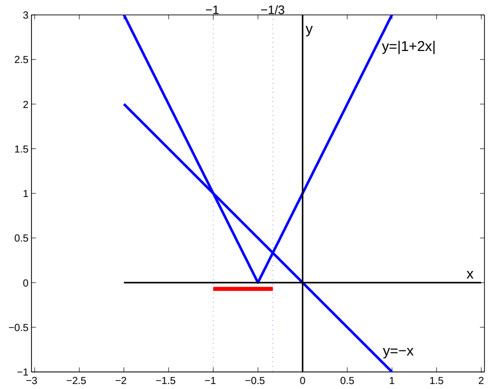


Figura 2.6: $|1 + 2x| \leq -x$

$$\sqrt{2-2x} = x + 3 \tag{2.1}$$

e quindi chiaramente deve essere verificato $x + 3 \geq 0$. Ora, elevando al quadrato entrambi i termini dell'equazione (2.1) risulta $2 - 2x = x^2 + 6x + 9$ e quindi l'equazione (a) diventa $x^2 + 8x + 7 = 0$. Dall'identità $x^2 + 8x + 7 = (x + 7)(x + 1)$ si deduce che l'unica soluzione dell'equazione (a) è $x = -1$. Infatti $x = -7$ non appartiene all'intervallo $[-3, +1]$. Graficamente la situazione è rappresentata dalla Figura 2.7

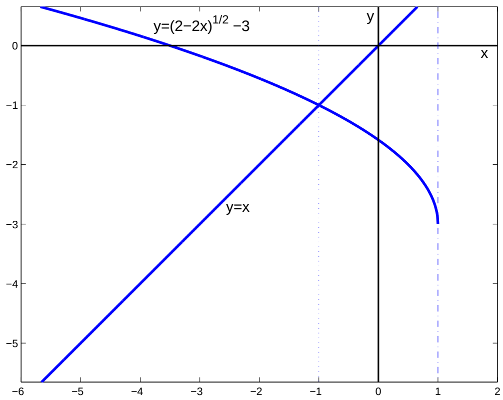


Figura 2.7: $\sqrt{2-2x} - 3 = x$

(b) $\sqrt{4-9x^2} < 2(1-3x)$.

Come prima cosa osserviamo che (b) ha senso se e solo se $4 - 9x^2 \geq 0$ e in questa situazione, essendo $\sqrt{4-9x^2} \geq 0$, bisogna imporre la condizione $1 - 3x \geq 0$. Quindi possiamo affermare che il dominio di definizione della disequazione (b) è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 4 - 9x^2 \geq 0 \\ 1 - 3x \geq 0 \end{cases}.$$

Ora sono molto utili i risultati ottenuti nello svolgimento del precedente esercizio 3, da cui si ottiene che $[-2/3, 1/3]$ è l'insieme delle soluzioni del precedente sistema. Quindi restringendo lo studio della disequazione (b) all'intervallo $[-2/3, 1/3]$, possiamo elevare al quadrato entrambi i termini della disuguaglianza (b) senza alterarne il senso ottenendo

$$4 - 9x^2 < 4 - 24x + 36x^2$$

che è equivalente a $45x^2 - 24x > 0$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $45x^2 - 24x = 3x(15x - 8) > 0$, come risulta anche dalla Figura 2.8, è $]-\infty, 0[\cup]8/15, \infty[$.

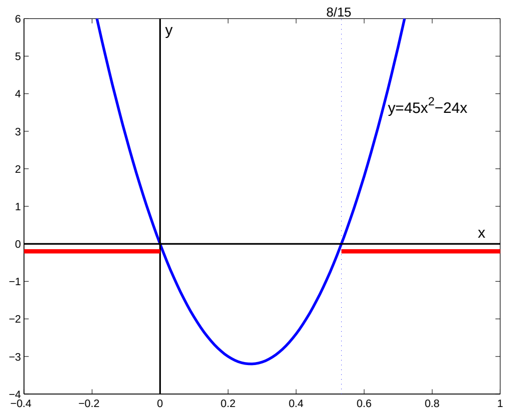


Figura 2.8: $45x^2 - 24x > 0$

Perciò otteniamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione (b) è

$$(]-\infty, 0[\cup]8/15, \infty[) \cap [-2/3, 1/3] = [-2/3, 0[.$$

6. (a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$.

È equivalente all'equazione $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$ e quindi risulta molto utile la formula di addizione del seno: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, da cui si ottiene che

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$$

Ricordando che la funzione seno è periodica di periodo 2π e che nell'intervallo $[0, 2\pi[$ assume valore 1 solo in $\pi/2$, otteniamo che l'insieme delle soluzioni è costituito da quelle x per cui $\pi/6 + x = \pi/2 + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$; cioè l'insieme $\{\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $2\sin(2x) + 1 > 0$.

La disequazione è verificata per tutti gli x tali che $\sin(2x) > -1/2$. Il seno assume il valore $-1/2$ se e solo se l'angolo assume il valore $7\pi/6 + 2k\pi$ o $11\pi/6 + 2k\pi$ per ogni valore intero di k. La situazione è descritta dalla Figura 2.9

Si osserva che il seno assume valore strettamente maggiore a $-1/2$ in tutti e soli gli angoli con ampiezza compresa negli intervalli $]-\pi/6 + 2k\pi, 7\pi/6 + 2k\pi[$ per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$. Da ciò si deduce che x è soluzione della disequazione (b) se e solo se

$$-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi < 2x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{12}\pi + k\pi < x < \frac{7}{12}\pi + k\pi$$

per un qualsiasi valore di $k \in \mathbb{Z}$. Concludiamo deducendo che l'insieme delle soluzioni della disequazione (b) è

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7}{12}\pi + k\pi\right[.$$

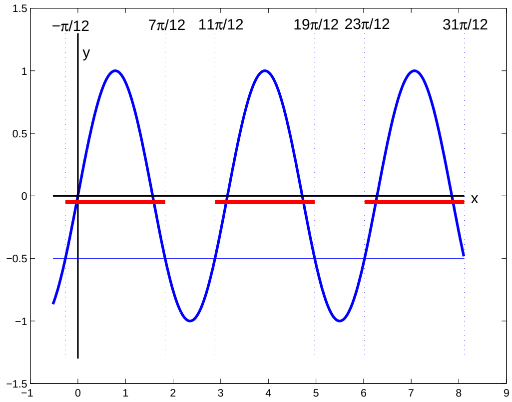


Figura 2.9: $\sin 2x > -1/2$

7. Ricordiamo che l'equazione della retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Da cui si deduce che

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

interpretando in modo opportuno il caso in cui $y_1 = y_2$ o $x_1 = x_2$. Dalla precedente formula con $P_1 \equiv O(0, 0)$ e $P_2 \equiv P(3, \sqrt{3})$ otteniamo che la retta passante per O e per P ha equazione $y = x/\sqrt{3}$. Tale retta ha coefficiente angolare uguale a $1/\sqrt{3}$. Ricordando che il coefficiente angolare di una retta è il valore della tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo, allora l'angolo cercato sarà $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$.

Ora è facile verificare che

$$\frac{3}{2} = 2\cos^2 \pi/6 = 5 \sin \pi/6 - 1.$$

8. Ricordiamo che la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si calcola con la seguente formula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ora traduciamo in termini algebrici il fatto che l'asse del segmento di estremi A e B è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B. Dato un generico punto del piano $P(x, y)$, chiedere che appartenga alla retta cercata è equivalente a chiedere che valga

$$\operatorname{dist}(P, A) = \operatorname{dist}(P, B) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2},$$

elevando tutto al quadrato otteniamo

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

giungendo così all'equazione dell'asse.

9. Ricordiamo che la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è

$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

e il punto medio ha coordinate $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$. Quindi per ogni $t \in [0, 6]$ avremo $B(t)(t, 0)$ e $A(t)(0, y_t)$ dove y_t è l'unica soluzione positiva all'equazione

$$y_t^2 + t^2 = 36 \tag{2.2}$$

cioè $y_t = \sqrt{36 - t^2}$. Chiaramente la (2.2) è dedotta direttamente dal fatto che $\mathrm{dist}\big(B(t), A(t)\big) = 6$. Ora è immediato ottenere la rappresentazione parametrica del punto medio tra $A(t)$ e $B(t)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{36-t^2}}{2} \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 6].$$

Osserviamo che ogni coppia (x, y) del luogo geometrico descritto dal punto medio verifica

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{36 - t^2}{4} = 9.$$

Cioè, al variare di t in $[0, 6]$, il punto medio del segmento $\overline{A(t)B(t)}$ è un punto dell'arco della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3. Più precisamente, è immediato verificare che l'insieme di tali punti medi sono i punti della suddetta circonferenza con coordinate x e y entrambi non negativi. Il Grafico è rappresentato nella Figura 2.10

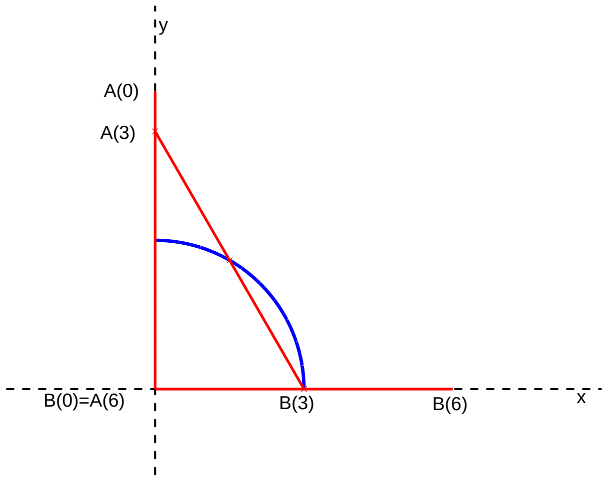


Figura 2.10: Es. 9 del 28/9/01

10. È immediato calcolare $\hat{C} = 180° - 80° - 70° = 30°$. Gli altri lati li calcoliamo con il teorema dei seni che afferma che è costante il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto. Perciò vale la seguente serie di identità

$$\frac{|\overline{BC}|}{\sin \hat{A}} = \frac{|\overline{AC}|}{\sin \hat{B}} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \hat{C}}.$$

Dove chiaramente $\hat{A}$ è l'angolo opposto al lato $\overline{BC}$ e così via (guardare la Figura 2.11). Deduciamo immediatamente che

$$|\overline{BC}| = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \hat{C}} \sin \hat{A} = \frac{20}{\sin 30°} \sin 80° \approx 39,39$$

$$|\overline{AC}| = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \hat{C}} \sin \hat{B} = \frac{20}{\sin 30°} \sin 70° \approx 37,59$$

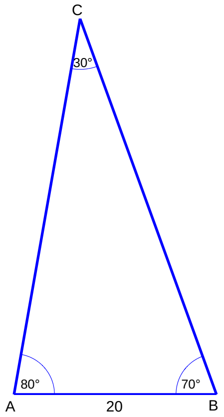


Figura 2.11: Es. 10 del 28/9/01

2.2 Prova scritta del 27/9/02

1. (a) Vale

$$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3} > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Infatti, essendo entrambi i termini della disequazione positivi, possiamo elevarli al quadrato senza alterare il verso della disequazione e moltiplicare tutto per 3, in questo modo si ottiene

$$2\sqrt{5}-\sqrt{3} < \sqrt{6}.$$

Ora, rielevando entrambi i termini al quadrato otteniamo

$$20+3-4\sqrt{15} > 6 \quad \Leftrightarrow \quad 17 > 4\sqrt{15}.$$

Elevando di nuovo al quadrato entrambi i termini dell'ultima disequazione ricaviamo

$$289 > 240$$

che è chiaramente vero.

(b) Vale $2^{10}+2^{10} = 2^{11}$. Infatti, $2^{10}+2^{10} = 2 \cdot 2^{10} = 2^{1+10} = 2^{11}$. Abbiamo usato la proprietà delle potenze per cui $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ogni intero n e m.

(c) Vale $3^{3^3} > (3^3)^3$. Infatti, in generale vale $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e ogni intero n e m. Quindi si ha $(3^3)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9 < 3^{27} = 3^{3^3}$.

(d) Vale $\log_2 \frac{3}{2} > \log_2 \frac{1}{4}$. Infatti, $\log_2 x$ è una funzione crescente cioè per ogni $x \geq y > 0$ si ha che $\log_2 x \geq \log_2 y$.

(e) Vale $\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2$. Infatti, $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$.

2. È immediato verificare che il polinomio $2x^3-3x^2-5x+6$ ammette $+1$ come radice e quindi per il teorema di Ruffini si ottiene che $x-1$ divide il polinomio $2x^3-3x^2-5x+6$. Con i seguenti semplici calcoli

	+2	-3	-5	+6
+1		+2	-1	-6
	+2	-1	-6	//

deduciamo che

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x-1)(2x^2 - x - 6).$$

Usando la formula risolutiva per equazioni di secondo grado, troviamo che le radici di $2x^2 - x - 6$ sono

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4}$$

cioè $x_1 = 2$ e $x_2 = -3/2$ da cui risulta che

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-2)(2x+3).$$

Quindi il dominio è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, -3/2\}$.
Raccogliendo x^2, nel numeratore della frazione algebrica, e poi usando il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ otteniamo

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x-1)(x+1).$$

perciò

$$\frac{x^4 - x^2}{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)(2x+3)} = \frac{x^2(x+1)}{(x-2)(2x+3)}.$$

3. (a) $\sqrt{x^2 - 6x} = -1$. Il dominio di definizione dell'equazione è $x^2 - 6x \geq 0$. L'equazione non ammette soluzioni perché, nel dominio, $\sqrt{x^2 - 6x}$ è sempre maggiore o uguale a zero. E quindi non può mai essere uguale a -1.

(b) $\sqrt{x+6} = -x$.

Il dominio di definizione dell'equazione è $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 6 \geq 0\} = [-6, +\infty[$. Essendo nel dominio $\sqrt{x+6} \geq 0$, è chiaro che le soluzioni staranno nell'intervallo in cui $-x \geq 0$ ovvero $x \leq 0$. Quindi restringiamo lo studio dell'equazione all'intervallo $[-6, 0]$. Elevando al quadrato entrambi i termini dell'equazione (b), otteniamo $x + 6 = x^2$ che è equivalente a

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0 \quad e \quad x \in [-6, 0].$$

Perciò l'unica soluzione è $x = -2$.

(c) $\sin 2x - \sin x = 0$.

Usiamo la formula di duplicazione del seno

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

così l'equazione diventa $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$. Raccogliendo $\sin x$ otteniamo $(\sin x)(2\cos x - 1) = 0$. Il seno si annulla in $k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Invece $2\cos x - 1$ si annulla quando $\cos x = 1/2$; ciò accade se e solo se $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$ per un qualsiasi valore intero di k. Concludiamo deducendo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (c) è

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

4. (a) $|x^2 - 3| < 1$.

Dobbiamo dividere lo studio della disequazione in due casi.
Caso $x^2 - 3 \geq 0$. Si ha con $x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$. In questo caso la disequazione diventa $x^2 - 3 < 1$ e quindi $x^2 - 4 < 0$ e quindi le soluzioni sono

$$x \in]-2, 2[\cap \left(\left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[\right) = \left]-2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right[.$$

La situazione in questo caso è rappresentata nella Figura 2.12

Caso $x^2 - 3 < 0$. Si ha con $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. In questa situazione la disequazione diventa $-x^2 + 3 < 1$ e quindi $-x^2 + 2 < 0$ e quindi le soluzioni sono

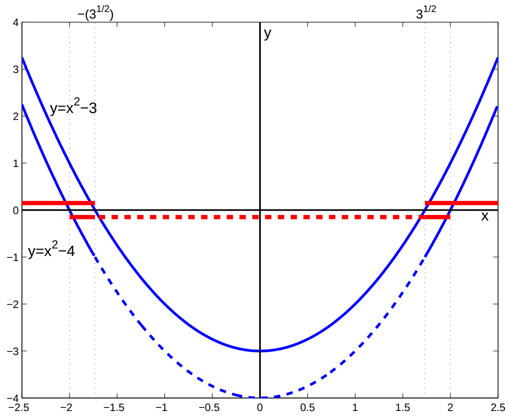


Figura 2.12: $x^2 - 4 < 0$ (con $x^2 - 3 \geq 0$)

$$x \in (-\sqrt{3},\ \sqrt{3}) \cap ((-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\ \sqrt{3}).$$

La situazione grafica di questo caso è rappresentata nella Figura 2.13

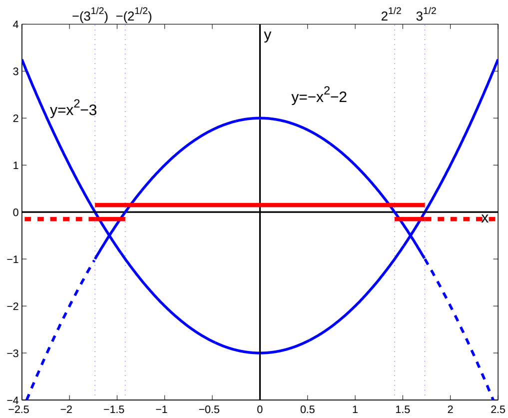


Figura 2.13: $-x^2 + 2 < 0$ (con $x^2 - 3 < 0$)

Infine, facendo l'unione delle soluzioni di entrambi i casi, deduciamo che la disequazione (a) è soddisfatta nell'insieme

$$x \in \left]-2, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, 2\right[$$

Proponiamo anche una risoluzione più algebrica.

$$\begin{aligned}
|x^2 - 3| < 1 \quad &\Leftrightarrow -1 < x^2 - 3 < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 + 3 < x^2 < 1 + 3 \\
&\Leftrightarrow 2 < x^2 < 4 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2 \\ x^2 < 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x \in]-2, 2[\cap \left(]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[\right) = \left]-2, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, 2\right[
\end{aligned}$$

(b) $\sqrt{1-x}+1 > \dfrac{2x}{\sqrt{1-x}}$.

Il dominio di definizione della disequazione è x tale che $1-x>0$ e quindi $D=\{x\in\mathbb{R} \mid x<1\}$. Moltiplichiamo entrambe i membri della disequazione per $\sqrt{1-x}$, che è sempre positivo, ottenendo $1-x+\sqrt{1-x}>2x$. Ora isolando la radice abbiamo

$$\sqrt{1-x} > 3x-1 \tag{2.3}$$

che è sempre verificata per $3x-1\leq 0$ cioè per $x\leq 1/3$ (ricordare che per $x\in D$, $\sqrt{1-x}>0$). Per $1/3\leq x<1$, poiché sia $\sqrt{1-x}$ che $3x-1$ sono non negativi, possiamo elevare al quadrato entrambi i termini della disequazione (2.3) senza alterarne il verso ottenendo $1-x>9x^2-6x+1$ che è equivalente a $9x^2-5x=x(9x-5)<0$. Il polinomio $x(9x-5)$ si annulla in $x=0$ e $x=5/9$, quindi, con $1>x\geq 1/3$, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $(1/3,5/9)$. Graficamente la situazione è rappresentata dalla Figura 2.14

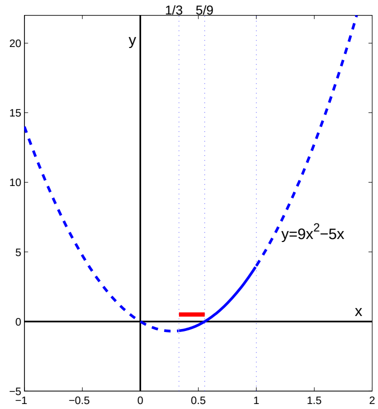


Figura 2.14: $9x^2-5x<0$ (con $1>x\geq 1/3$)

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione (b) è $]-\infty,1/3]\cup]1/3,5/9[\,=\,]-\infty,5/9[$ e la situazione è rappresentata dalla Figura 2.15

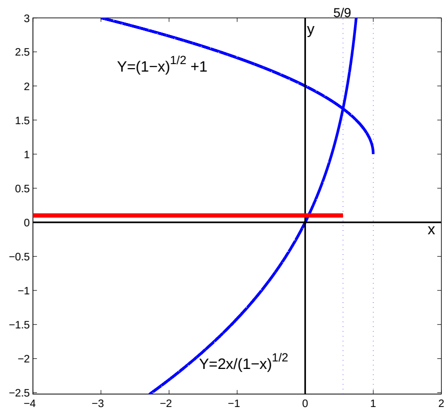


Figura 2.15: Disequazione (b) Es. 4 del 27/9/02

(c) $\dfrac{1-2\sin x}{1-\cos x}>0$.

Il dominio di definizione della disequazione è da tutte le x tali che $1 - \cos x \neq 0$ e quindi $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il denominatore $1 - \cos x$ è sempre positivo nel dominio di definizione della frazione trigonometrica. Perciò il segno dipende solo dal numeratore. Osserviamo che $1 - 2\sin x > 0$ se e solo $\sin x < 1/2$. Ricordando che $\sin x$ assume il valore $1/2$ se e solo se $x = \pi/6 + 2k\pi$ o $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, dal grafico della funzione $\sin x$ (Figura A.1) si verifica immediatamente che l'insieme delle soluzioni della disequazione (c) è

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (2k+2)\pi\right[\right)$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.16

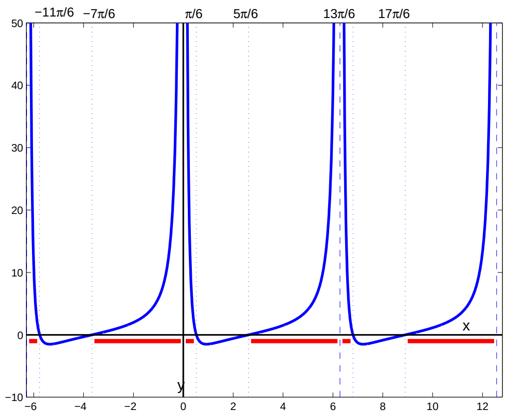


Figura 2.16: $\dfrac{1 - 2\sin x}{1 - \cos x} > 0$

5. La risposta corretta è $\log_2 x = |2x - 3|$. Infatti, nella Figura 2.17, a sinistra abbiamo il grafico di $\log_2$ e a destra il grafico di $|2x - 3|$.

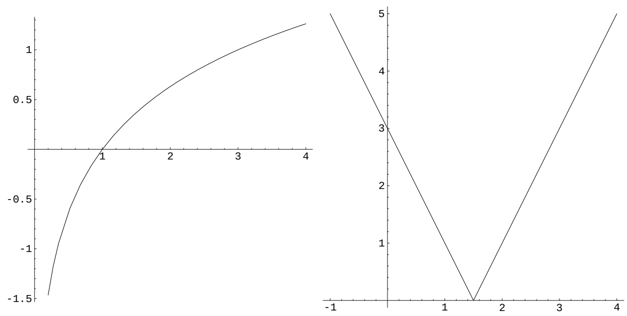


Figura 2.17: Es.5 del 27/9/02

6. Ricordiamo che il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle rette mediane[3] del triangolo.[4] È sufficiente determinare l'equazione di due mediane e poi trovarne il punto di intersezione. Il punto medio del lato $\overline{BC}$ è $D = \left(\frac{6+3}{2}, \frac{9+12}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{21}{2}\right)$ e quindi la mediana passante per $A = (1, 2)$

[3] Una "retta mediana" in un triangolo è una retta che passa per un vertice e il punto medio del lato opposto del triangolo.
[4] Si sarebbe anche potuto trovare il baricentro come media aritmetica delle coordinate degli estremi.

apparterrà alla retta del piano passante per A e D. Ricordiamo che l'equazione di una retta passante per i punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ è

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = \frac{x - x_0}{x - x_1},$$

in generale si dovrà interpretare in modo opportuno il caso in cui $y_0 = y_1$ o $x_0 = x_1$. La retta passante per A e D avrà equazione

$$\frac{y - 2}{\frac{21}{2} - 2} = \frac{x - 1}{\frac{9}{2} - 1}$$

cioè $y = \frac{17}{7}x - \frac{3}{7}$. Il punto medio del lato $\overline{AC}$ è E di coordinate $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+12}{2}\right) = (2, 7)$ e quindi la mediana passante per $B(6, 9)$ apparterrà alla retta di equazione

$$\frac{y - 9}{x - 6} = \frac{7 - 9}{2 - 6}$$

cioè $y = \dfrac{x}{2} + 6$. Ora il baricentro è la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{17}{7}x - \dfrac{3}{7} \\ y = \dfrac{x}{2} + 6 \end{cases}.$$

Uguagliando i due termini di destra otteniamo

$$\frac{17}{7}x - \frac{3}{7} = \frac{x}{2} + 6$$

che, moltiplicando tutto per $14 = \text{m.c.m.}(2, 7)$, vediamo che è equivalente a $34x - 6 = 7x + 84$ e quindi si ha $x = 10/3$. Ora si deduce immediatamente che $y = 10/(3 \cdot 2) + 6 = 23/3$ e $G\,(10/3, 23/3)$.
Il grafico è rappresentato dalla Figura 2.18

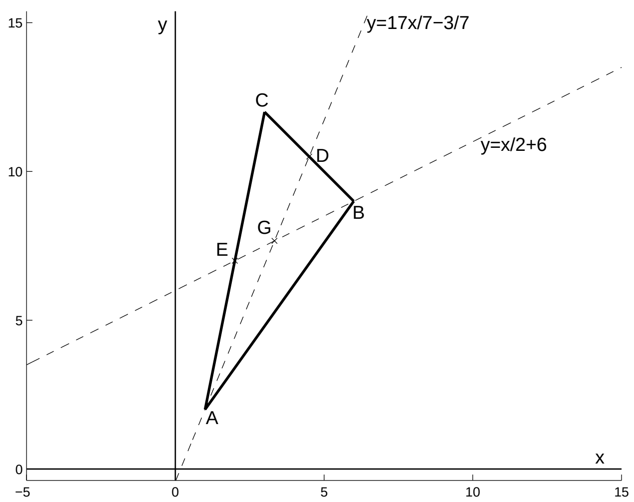


Figura 2.18: Es. 6 del 27/9/02

Ora osserviamo che l'affinità f agisce nel seguente modo:

$$A(1, 2) \mapsto A'(4, 10)$$

$$B(6,9) \mapsto B'(24,45)$$

$$C(3,12) \mapsto C'(12,60)$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento di prima applicato al triangolo $A'B'C'$. Il punto medio del lato $\overline{B'C'}$ è D', di coordinate$\left(\frac{24+12}{2}, \frac{45+60}{2}\right) = (18, 105/2)$ e quindi la mediana passante per $A'(4,10)$ apparterrà al luogo geometrico dei punti (x,y) del piano che soddisfano

$$\frac{y-10}{x-4} = \frac{\frac{105}{2} - 10}{18-4}$$

che è la retta di equazione $y = \frac{85}{28}x - \frac{15}{7}$. Il punto medio del lato $\overline{A'C'}$ è D' di coordinate $\left(\frac{4+12}{2}, \frac{10+60}{2}\right) = (8,35)$ e quindi la mediana passante per $B'(24,45)$ apparterrà al luogo geometrico dei punti (x,y) del piano che soddisfano

$$\frac{y-45}{x-24} = \frac{35-45}{8-24}$$

che rappresenta la retta di equazione $y = \dfrac{5x}{8} + 30$. Ora il baricentro è la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{85}{28}x - \dfrac{15}{7} \\ y = \dfrac{5x}{8} + 30 \end{cases}.$$

Uguagliando i due termini di destra otteniamo

$$\frac{85}{28}x - \frac{15}{7} = \frac{5x}{8} + 30$$

che, moltiplicando tutto per $56 = \text{m.c.m.}(28,8)$, vediamo che è equivalente a $170x - 120 = 35x + 1680$ e quindi si ha $x = \frac{40}{3}$. Ora si deduce immediatamente che $y = \frac{40 \cdot 5}{3 \cdot 8} + 30 = \frac{115}{3}$ e $G'(40/3, 115/3)$. Adesso è chiaro che

$$f(G) = f\left(\left(\frac{10}{3}, \frac{23}{3}\right)\right) = \left(4 \cdot \frac{10}{3}, 5 \cdot \frac{23}{3}\right) = \left(\frac{40}{3}, \frac{115}{3}\right) = G'.$$

7. Per fissare le idee abbiamo rappresentato il triangolo oggetto di studio nella Figura 2.19.

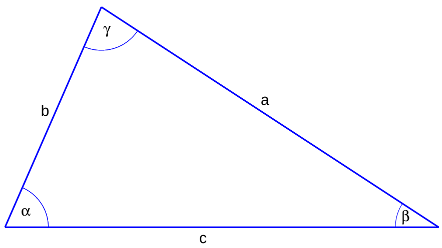


Figura 2.19: Es. 7 del 27/9/02

Useremo varie volte il fatto che se $x \in [0, \pi]$ allora $\sin x \geq 0$. Perciò, visto che abbiamo a che fare con angoli di ampiezza compresa tra 0 e π [5], in tutte le formule trigonometriche in cui il seno compare con segno $\pm$, prenderemo automaticamente il segno positivo. Cominciamo subito adottando questa convenzione:

[5] La somma degli angoli interni di un triangolo è π e quindi è chiaro che ogni angolo interno di un triangolo ha valore compreso in $(0, \pi)$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}}.$$

Usando la formula di bisezione del seno otteniamo

$$\sin\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Usando l'identità $\sin(\pi - x) = \sin x$ e la formula di addizione del seno otteniamo

$$\sin\gamma = \sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(2\beta+\beta) = \cos 2\beta\sin\beta + \sin 2\beta\cos\beta.$$

Usando la formula di bisezione del coseno si ha

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{7}{10}}$$

e quindi

$$\sin\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{10}} \pm \sqrt{\frac{21}{25}}\sqrt{\frac{7}{10}}.$$

Il segno $-$ si può escludere perché $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{10}} - \sqrt{\frac{21}{25}}\sqrt{\frac{7}{10}} < 0$ e quindi si ha

$$\sin\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{21}{25}}\sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Ora applichiamo il teorema dei seni che dice che

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma};$$

da cui si deduce che

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha = \frac{5}{9}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{70}}{9},$$

$$b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta = \frac{5}{9}\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}.$$

8. Osserviamo che

$$y = -4t^2 + 12t - 5 = (2t-1)(-2t+5) = x(-x+4) = -x^2 + 4x.$$

Si tratta di una parabola con la parte sopra il grafico concava con vertice $V = (2,4)$, asse $x = 2$ e intersezione con gli assi in $(0,0), (4,0)$. Il grafico è rappresentato nella Figura 2.20

Imponiamo a una generica retta $y = mx + q$ la condizione di dover passare per il punto $(0,4)$ e così otteniamo il fascio di rette descritto da

$$y = mx + 4 \quad \text{al variare di } m \in \mathbb{R} \quad e \quad x = 0. \tag{2.4}$$

Ricordiamo che una retta $ax+by+c = 0$ è tangente a una conica[6] $a_{0,0}x^2 + 2a_{0,1}xy + 2a_{0,2}x + a_{1,0}y^2 + 2a_{0,2}y + a_{2,2} = 0$ se il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_{0,0}x^2 + 2a_{0,1}xy + 2a_{0,2}x + a_{1,0}y^2 + 2a_{0,2}y + a_{2,2} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

[6] Le coniche non degeneri sono le ellissi, le parabole e le iperboli.

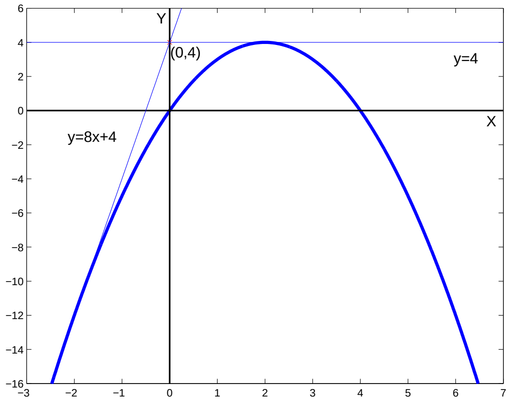


Figura 2.20: Es. 8 del 27/9/02

ha due soluzioni coincidenti.[7] Una tale soluzione si dice con molteplicità 2. Altrimenti le soluzioni le chiamaremo semplici. Il sistema (2.5) può avere anche una o nessuna soluzione.

Si vede immediatamente che la retta $x = 0$ interseca la parabola $y = -x^2 + 4x$ nel punto di intersezione semplice $(0, 0)$ e quindi non può essere una tangente.

Ogni altra retta del fascio (2.4) interseca la parabola nei punti di soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = mx + 4 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \tag{2.6}$$

La condizione di tangenza si traduce nel chiedere che il sistema abbia solo una soluzione ma con molteplicità due. Questo equivale a chiedere che l'equazione

$$mx + 4 = -x^2 + 4x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (m-4)x + 4 = 0)$$

ottenuta uguagliando i due termini di destra delle equazioni del sistema 2.6, abbia un'unica soluzione. Ciò avviene se e solo se il discriminante di $x^2 + (m-4)x + 4$ è nullo cioè

$$\Delta = (m-4)^2 - 16 = m^2 - 8m = 0 \quad \Leftrightarrow m = 0 \; o \; m = 8.$$

Quindi le equazioni delle due tangenti sono

$$y = 4 \quad e \quad y = 8x + 4.$$

2.3 Prova scritta del 19/9/03

1. Riscriviamo ogni monomio in a come potenza di a

$$\begin{array}{cccccccc} a\sqrt[3]{a} & a^{2/5} & a^2\sqrt{a} & a^{1/3} & \sqrt{\sqrt{a}} & \sqrt[3]{a} & \sqrt{a^5} & \sqrt[4]{a} \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ a^{4/3} & a^{2/5} & a^{5/2} & a^{1/3} & a^{1/4} & a^{1/3} & a^{5/2} & a^{1/4} \end{array}.$$

Quindi vale

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} < a^{1/3} = \sqrt[3]{a} < a^{2/5} < a\sqrt[3]{a} < a^2\sqrt{a} = \sqrt{a^5}.$$

[7]Per esempio l'equazione $x - 1 = 0$ ha una soluzione semplice $x = 1$, invece $x = 1$ è una soluzione doppia dell'equazione $(x-1)^2 = 0$.

2. La pendenza di una strada indica di quanti metri si innalza per ogni 100 metri di avanzamento in orizzontale. Quindi dire che una strada sale del 16% significa dire che percorrendola, ogni 100 metri percorsi in orizzontale, saliamo di 16 metri. Una salita è del 100% se per ogni 100 metri percorsi in orizzontale, saliamo di 100 metri. Cioè la strada forma con una retta orizzontale un angolo di $\pi/4$.

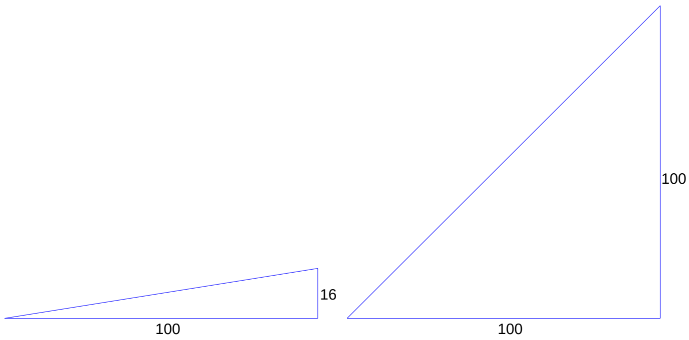


Figura 2.21: pendenza del 16% e del 100%

3. Basta usare il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ che vale per ogni coppia di numeri a e b. Quindi vale

$$(a-b) = (a-b)\cdot 1 = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

4. Nella figura A.1 è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = \sin x$. Assegnata una funzione $f(x)$, il grafico della sua opposta $-f(x)$ si ottiene riflettendo il grafico di $f(x)$ rispetto all'asse delle ascisse. Dato che $|\sin x| = \begin{cases} +\sin x & \text{se } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{se } \sin x < 0 \end{cases}$, riflettendo la parte negativa di $f(x) = \sin x$, otteniamo la Figura 2.22 che è il grafico di $h(x) = |\sin x|$

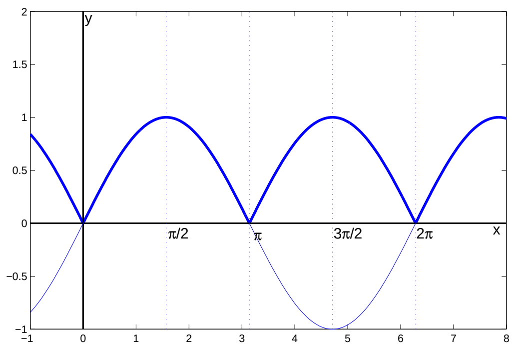


Figura 2.22: $|\sin(x)|$

Infine sommare -1 significa abbassare di 1 il grafico di $h(x) = |\sin x|$ e quindi si deduce che il grafico di $g(x) = |\sin x| - 1$ è quello rappresentato nella Figura 2.23

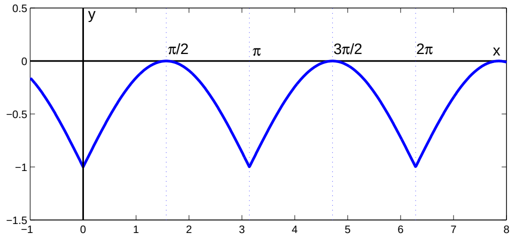


Figura 2.23: $|\sin(x)| - 1$

5.

$$\frac{\dfrac{9y^2}{3y-2x} - 3y}{2x} : \frac{3y}{2x + \dfrac{9y^2}{2x-3y}} = \frac{\dfrac{9y^2}{3y-2x} - 3y}{2x} \cdot \frac{2x + \dfrac{9y^2}{2x-3y}}{3y}$$

$$= \frac{\dfrac{9y^2 - 3y(3y-2x)}{3y-2x}}{2x} \cdot \frac{\dfrac{2x(3y-2x) - 9y^2}{3y-2x}}{3y}$$

$$= \frac{6xy}{2x(3y-2x)} \cdot \frac{6xy - 4x^2 - 9y^2}{3y(3y-2x)}$$

$$= -\frac{6xy(4x^2 - 6xy + 9y^2)}{6xy(3y-2x)^2}$$

$$= -\frac{(4x^2 - 6xy + 9y^2)}{(3y-2x)^2}$$

6. (a) $\dfrac{x^2 + x}{-2x^2}$.

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè $x \neq 0$. Si ha la seguente identità tra frazioni algebriche

$$\frac{x^2 + x}{-2x^2} = \frac{x(x+1)}{-2x^2}$$

e nel dominio vale la seguente identità tra funzioni

$$\frac{x^2 + x}{-2x^2} = -\frac{x+1}{2x}.$$

(b) $\dfrac{2x^3 + 5x^2 - 33x + 20}{(2x-5)(x-1)}$.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{5/2, 1\}$. Se $g(x) = 2x^3 + 5x^2 - 33x + 20$, si calcola immediatamente che

$$g(1) = 2 + 5 - 33 + 20 = -6$$

e

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = 2\frac{125}{8} + 5\frac{25}{4} - 33\frac{5}{2} + 20 = \frac{125 + 125 - 330 + 80}{4} = 0.$$

Quindi il teorema di Ruffini ci dice che il polinomio $2x^3 + 5x^2 - 33x + 20$ non è diviso da $x - 1$ mentre è diviso da $x - 5/2$. Con i seguenti semplici calcoli

	+2	+5	-33	+20
$+\frac{5}{2}$		+5	+25	-20
	+2	+10	-8	//

troviamo che

$$2x^3 + 5x^2 - 33x + 20 = \left(x - \frac{5}{2}\right)(2x^2 + 10x - 8)$$

da cui deduciamo

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 33x + 20}{(2x-5)(x-1)} = \frac{(2x-5)(x^2+5x-4)}{(2x-5)(x-1)} = \frac{x^2+5x-4}{x-1}.$$

Tale identità tra funzioni razionali vale solo nel dominio di definizione D.

7. (a) $\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3 + \sqrt{2x-1}}$.

Il dominio dell'equazione è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq 0\} = [1/2, \infty[$. Infatti con $x \geq 1/2$ si ha che $x^3 + \sqrt{2x-1} > 0$.

Elevando tutto alla sesta otteniamo $x^3 = x^3 + \sqrt{2x-1}$, da questo si deduce che $x = 1/2$.

(b) $\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin 3x$.

Ricordiamo che

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \;\text{ o }\; \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Vedere la Figura A.2.

Sostituendo nella (2.7) α con $x + 2/3\pi$ e β con $3x$, si deduce che le soluzioni dell'equazione (b) sono quelle x tali che

$$\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = 3x + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad x + \frac{2}{3}\pi = \pi - 3x + 2k\pi.$$

Con semplici calcoli otteniamo

$$x = \frac{1}{3}\pi + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{1}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi.$$

La situazione grafica è rappresentata dalla Figura 2.24.

(c) $\sqrt{|1 - x^2|} < x + 1$.

Essendoci il valore assoluto sotto la radice quadrata, $\sqrt{|1-x^2|}$ è sempre un numero reale ben definito e ≥ 0. Perciò bisogna porre la condizione $x + 1 > 0$ e quindi le soluzioni sono contenute nell'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, \infty[$. Bisogna però analizzare i due seguenti casi.

Caso $1 - x^2 \geq 0$. Si verifica quando $-1 \leq x \leq 1$. In questa situazione la disequazione diventa $\sqrt{1-x^2} < x+1$. Perciò, elevendo tutto al quadrato, l'insieme delle soluzioni sono tutte le $x \in [-1, 1]$ tali che $1 - x^2 < x^2 + 2x + 1$ che è equivalente a cercare le $x \in [-1, 1]$ tali che

$$2x^2 + 2x = 2x(x+1) > 0. \tag{2.8}$$

Essendo il coefficiente di x^2 in (2.8) positivo e cercando valori positivi per $2x^2 + 2x$, otteniamo che in questo caso le soluzioni sono le x tali che $x \in]0, 1]$. Graficamente la situazione è descritta dalla Figura 2.25

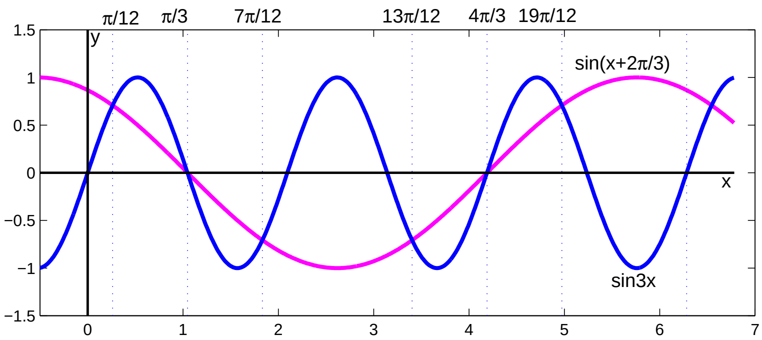


Figura 2.24: $\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin 3x$

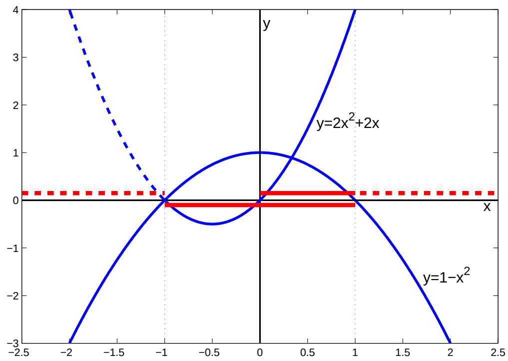


Figura 2.25: $2x^2+2x>0$ (con $1-x^2\geq 0$)

Caso $1-x^2<0$. Si verifica quando $x\in]1,+\infty[$ (ricordiamo che stiamo studiando la disequazione in $D=[-1,\infty[$). In questo caso la disequazione (c) diventa $\sqrt{x^2-1}<x+1$. perciò, elevando tutto al quadrato, l'insieme delle soluzioni è costituito da tutte le $x\in]1,+\infty[$ tali che

$$x^2-1<x^2+2x+1 \quad\Leftrightarrow\quad x>-1$$

Quindi in questo caso le soluzioni sono le x tali che $x\in]1,+\infty[$.

In generale, su tutta la retta reale, facendo l'unione delle soluzioni trovate nei due casi appena studiati, troviamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione (c) è l'intervallo

$$]0,+\infty[=]0,1]\cup]1,+\infty[).$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.26.

(d) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}}>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Il dominio di definizione della disequazione è l'insieme $D=[1,2[\cup]2,+\infty[$. Infatti è l'insieme dove simultaneamente si ha $x+1\geq 0$, $x-1\geq 0$ e $(x-2)^2\neq 0$. La disequazione (d) è verificata in tutto l'insieme di definizione D perché è più che evidente che

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}}>0>-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

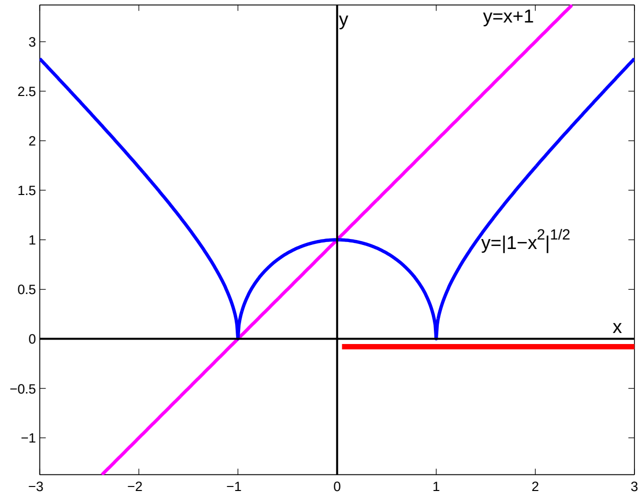


Figura 2.26: $\sqrt{|1 - x^2|} < x + 1$

(e) $2|\cos x| > \sqrt{3}$.

Dividendo tutto per 2, la disequazione (c) diventa $|\cos x| > \sqrt{3}/2$. Il grafico della funzione $\cos x$ è rappresentata nella Figura A.3. Analogamente a quanto visto nello svolgimento dell'esercizio **4**, si vede che il grafico della funzione $|\cos x|$ è quello rappresentato dalla Figura 2.27

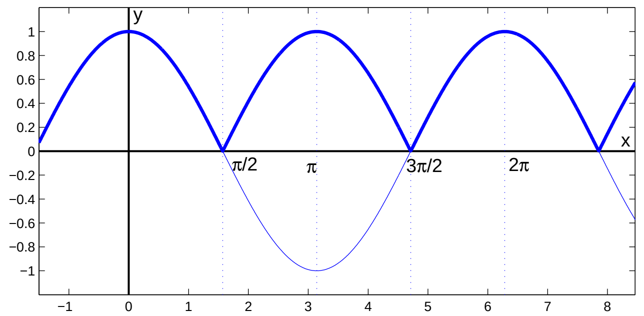


Figura 2.27: $|\cos x|$

Si vede immediatamente dal grafico, ma si può verificare molto facilmente per via analitica, che la funzione $|\cos x|$ è periodica di periodo π. Infatti per ogni angolo α vale $\cos\alpha = -\cos(\pi+\alpha)$ e quindi $|\cos\alpha| = |\cos(\pi + \alpha)|$. A questo punto è facile dedurre che $|\cos x| = \sqrt{3}/2$ se e solo $x = \pm\pi/6 + k\pi$ per un qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$. Essendo, per esempio, $\cos 0 = 1$ da questo si deduce che bisogna prendere valori interni agli intervalli del tipo $]-\pi/6 + k\pi, \pi/6 + k\pi[$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione (e) è

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right[.$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.28.

8. Ricordiamo che dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano, la loro distanza si calcola con la seguente formula

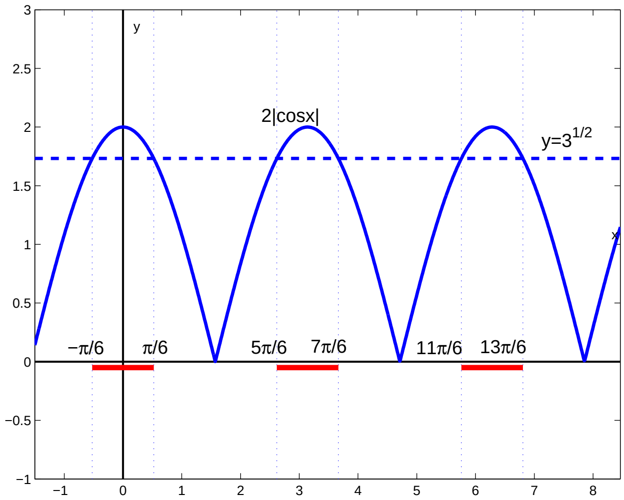


Figura 2.28: $2|\cos x| = \sqrt{3}$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Applicandola ai punti $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $P(x,y)$ si ottiene che

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad d(P,A) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Il testo dell'esercizio richiede di cercare l'equazione del luogo dei punti per cui $d(P,O) = 2d(P,A)$. Sostituendo i valori appena trovati per $d(P,O)$ e $d(P,A)$ otteniamo

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri di questa ultima equazione otteniamo $x^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$. Sviluppando il quadrato di $x-1$ e portando tutti i termini sul lato sinistro dell'ultima equazione otteniamo $3x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0$. Riscrivendo 4 come $16/3 - 4/3$ nell'ultima equazione otteniamo

$$3\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right) + 3y^2 - \frac{4}{3} = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 3y^2 - \frac{4}{3} = 0$$

giungendo all'equazione del cerchio

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

con raggio uguale a $2/3$ e centro il punto $(4/3, 0)$ rappresentato nella Figura 2.29.

9. Graficamente la situazione è rappresentata dalla Figura 2.30.

Si vede immediatamente che

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

da cui si deduce che $\sin\gamma = \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Ora è sufficiente applicare il teorema dei seni, che dice

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

per dedurre che

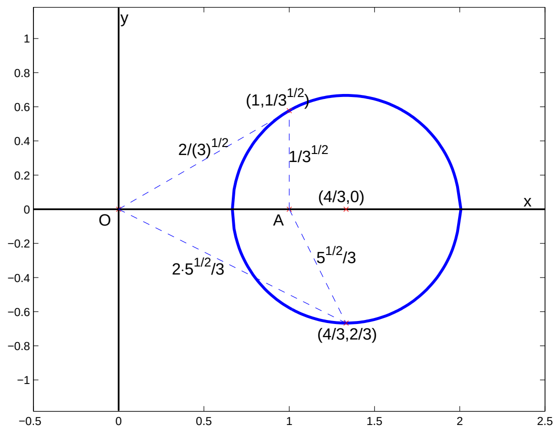


Figura 2.29: $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$

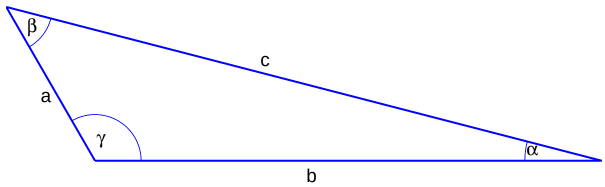


Figura 2.30: Es.9 del 19/9/03

$$a=\frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{4}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il teorema di Carnot dice che

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta. \tag{2.9}$$

Quindi, per calcolare b, dobbiamo determinare $\cos\beta$. Volendo usare la formula di sottrazione del coseno

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

dobbiamo calcolare il valore di $\cos\alpha$.
Da $\alpha+\beta=\pi/3$ deduciamo che $\alpha<\pi/3$[8]. Teoricamente ci sono due possibili valori di α tali che $\sin\alpha=1/4$, ma solo un valore è minore di $\pi/3$ e in tale valore il coseno è positivo. Perciò

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ora siamo in grado di calcolare

$$\cos\beta=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Finalmente, per il teorema di Carnot (2.9)

[8] Abbiamo usato < e non ≤ perché in un triangolo tutti gli angoli sono non nulli.

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{\frac{1}{3} + 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right)} = \sqrt{\frac{23}{6} - \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

10. Il polinomio $P(x)$ ammette $x = 1$ come radice se e solo se

$$P(1) = 1 + 2 + a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a - 3.$$

Quindi il polinomio $P(x)$ diventa $x^3 + 2x^2 + ax - a - 3$. Si verifica immediatamente che $P(1) = 0$ e quindi per il teorema di Ruffini si ha che $x - 1$ divide $P(x)$. Con semplici calcoli si verifica che

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + ax - a - 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + a + 3).$$

In questo modo, definendo $Q(x) = x^2 + 3x + a + 3$, si vede che $x = 1$ è una radice doppia per $P(x)$ se e solo se

$$Q(1) = 1 + 3 + a + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow a = -7.$$

Con $a = -7$ e $b = -a - 3 = 4$, si ha

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x - 1)^2(x + 4).$$

2.4 Prova scritta del 15/11/04

1. (a) $P(a) = -a^2 + 2a - 1$

Sfruttiamo la formula del quadrato di un binomio $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sostituendo in questa formula -1 a b e cambiando di segno otteniamo

$$-(a - 1)^2 = -(a^2 - 2a + 1) = -a^2 + 2a - 1 = P(a).$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{9 - 6x + x^2}$.

Usiamo ancora la formula del quadrato di un binomio da cui si deduce che

$$9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2.$$

Da questo si deduce che il dominio della funzione $f(x)$ è l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq 3$. Ora osserviamo che se denotiamo con $N(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, allora $N(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$, da cui, per il teorema di Ruffini, deduciamo che $x - 3$ divide il polinomio $N(x)$. Con i seguenti semplici calcoli

	+1	-2	-5	+6
+3		+3	+3	-6
	+1	+1	-2	//

otteniamo che

$$N(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x^2 + x - 2).$$

Da questo segue che

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{9 - 6x + x^2} = \frac{(x - 3)(x^2 + x - 2)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}.$$

La frazione non si può semplificare ulteriormente perché si calcola facilmente che 3 non è una radice del polinomio $x^2 + x - 2$ e quindi, ancora per la regola di Ruffini, si vede che $x - 3$ non divide il polinomio $x^2 + x - 2$. Più precisamente, si ha $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

2. (a) Come deve essere ben noto, un'equazione di primo grado in una incognita ammette al più una soluzione[9]. L'equazione $x + 3m = 7$ ha come soluzione $x = \sqrt{2}$ se e solo se $\sqrt{2} + 3m = 7$. Che equivale a imporre che

$$m = \frac{7 - \sqrt{2}}{3}.$$

(b) $|x^2 - x| - 9 \leq 0$.

Come al solito, in presenza di un valore assoluto dobbiamo studiare due casi.

Caso $x^2 - x \geq 0$. Si verifica quando $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. In questa situazione la disequazione diventa $x^2 - x - 9 \leq 0$. Sfruttando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado otteniamo che

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 36}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Essendo il coefficiente della x^2 di segno positivo, nel caso $x^2 - x \geq 0$, la disequazione è verificata in

$$\left[\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \frac{1 + \sqrt{37}}{2}\right] \cap]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[= \left[\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1 + \sqrt{37}}{2}\right].$$

Graficamente la situazione in questo caso è rappresentata dalla Figura 2.31

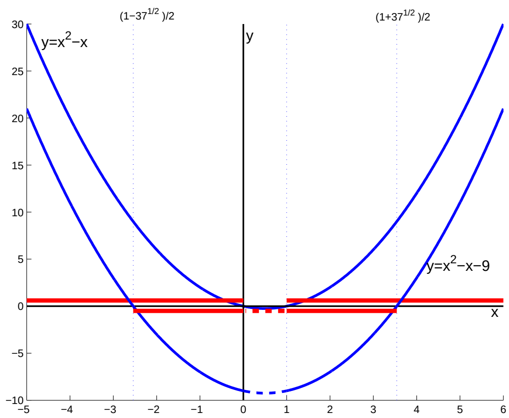


Figura 2.31: $|x^2 - x| - 9 \leq 0$ (con $x^2 - x \geq 0$)

Caso $x^2 - x < 0$. Si verifica quando $x \in]0, 1[$. In questa situazione la disequazione diventa $-x^2 + x - 9 \leq 0$. Moltiplicando tutto per -1, e quindi cambiando il verso della disequazione, otteniamo $x^2 - x + 9 > 0$. Il discriminante del polinomio $x^2 - x + 9$ è $\Delta = 1 - 36 = -35$ e quindi si vede facilmente che la disequazione è sempre verificata con $x \in (0, 1)$.

Graficamente la situazione in questo caso è rappresentata dalla Figura 2.32

In generale, considerando tutta la retta reale, facendo l'unione delle soluzioni trovate nei due casi, otteniamo che la disequazione (b) è verificata con

$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1 + \sqrt{37}}{2}\right] \cup]0, 1[= \left[\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \frac{1 + \sqrt{37}}{2}\right].$$

3. Il dominio della disequazione è l'insieme delle x per cui $x \geq 0$ e $x \neq 1$. Se $x \in [0, 1[$ allora $\sqrt{x} - 1 < 0$ e quindi tutto il termine di sinistra è negativo e quindi la disequazione non è verificata.

[9] Può non avere soluzioni per es. $x + 1 = x + 2$.

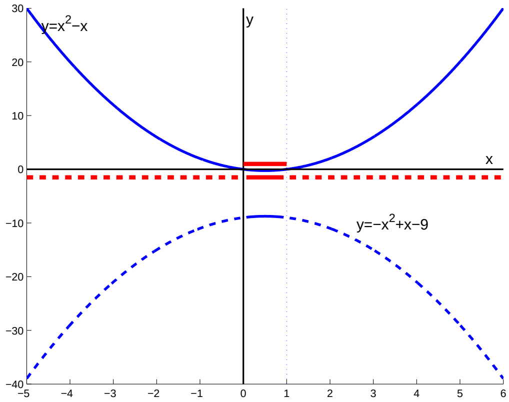


Figura 2.32: $|x^2 - x| - 9 \leq 0$ (con $x^2 - x < 0$)

Se $x > 1$ allora $\sqrt{x} - 1 > 0$ possiamo moltiplicare entrambi i termini della disequazione, lasciando inalterato il senso della disuguaglianza, ottenendo

$$\sqrt{x} > 2\sqrt{x} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow^{10} \quad 4 > x.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intervallo $]1, 4[$.

4. (a) Ricordiamo che vale $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Da questo si deduce immediatamente che

$$c = \left(\sqrt{19} - \sqrt{51}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{19^{\frac{1}{2}} + \sqrt{51}} = \left(\sqrt{19} - \sqrt{51}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\sqrt{19} + \sqrt{51}\right)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{19} - \sqrt{51}\right) \cdot \left(\sqrt{19} + \sqrt{51}\right)\right]^{\frac{1}{5}} =^{11} (19 - 51)^{\frac{1}{5}} = (-32)^{\frac{1}{5}} = -2$$

(b) Supponiamo per assurdo che $\sqrt[3]{2} = p/q$, dove p/q è una frazione ridotta ai minimi termini cioè con p e q interi coprimi (i.e. senza fattori in comune). Chiaramente non è restrittivo supporre che p e q siano entrambi positivi. Elevando al cubo otteniamo $2 = p^3/q^3$ e quindi $2 \cdot q^3 = p^3$. Da questa ultima identità risulta chiaro che p^3 è un numero pari ma, essendo un cubo, deve essere divisibile da $2^3 = 8$. Perciò 8 divide $2 \cdot q^3$ e quindi 4 divide q^3. Siamo arrivati all'assurdo che 2 divide sia q che p in contraddizione al fatto che p e q sono coprimi.

5. Ci sono almeno tre modi per risolvere questo esercizio. Il primo fa uso del teorema di Ruffini applicato ai numeri complessi $\mathbb{C}$ però è prematuro dare questo tipo di risoluzione in questo contesto. Un altro modo consiste nel fare la divisione euclidea del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$ ottenendo

$$P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + [(b + 1 - a)x + 2 - a]$$

dove il polinomio $(b - 1 - a)x + 2 - a$ è il resto della divisione. Il polinomio $P(x)$ è divisibile per $Q(x)$ se e solo se $(b + 1 - a)x + 2 - a$ è il polinomio nullo. Questo accade se e solo se

$$\begin{cases} b + 1 - a = 0 \\ 2 - a = 0 \end{cases}$$

quindi con $a = 2$ e $b = 1$. Lasciamo al lettore il compito di svolgere la divisione euclidea in tutti i suoi dettagli. Qui presentiamo, facendo tutti i conti, un altro tipo di risoluzione.

[10] Vale l'equivalenza perché sia 2 che $\sqrt{x}$ sono positivi

[11] Abbiamo usato il prodotto notevole $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$.

Supponiamo che $Q(x)$ divida il polinomio $P(x)$. Quindi esisterà un polinomio $D(x) = d_2x^2+d_1x+d_0$ tale che $P(x) = Q(x)D(x)$. Il polinomio $D(x)$ deve aver grado 2 perché vale

$$\deg(P(x)) = \deg(Q(x)) + \deg(D(x)).$$

Scriviamo esplicitamente la precedente identità tra polinomi

$$\begin{aligned} x^4 + ax^2 + bx + 2 &= (x^2 + x + 1)(d_2x^2 + d_1x + d_0) \\ &= d_2x^4 + (d_1 + d_2)x^3 + (d_0 + d_1 + d_2)x^2 + (d_0 + d_1)x + d_0. \end{aligned}$$

Per il principio di identità tra polinomi, la sequenza di uguaglianze vale se e solo se è verficato il seguente sistema lineare nelle indeterminate (d_2, d_1, d_0)

$$\begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 + d_2 = 0 \\ d_0 + d_1 + d_2 = a \\ d_0 + d_1 = b \\ d_0 = 2 \end{cases}.$$

Sistema che è equivalente al seguente

$$\begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 = -1 \\ 2 = a \\ 1 = b \\ d_0 = 2 \end{cases}.$$

6. Sia $P(x, y)$ un generico punto del piano. Sia H il seguente punto: se $P \in r$ prendiamo $P = H$; altrimenti denotiamo con H il punto della retta r per cui la retta passante per P e H è ortogonale alla retta P. In entrambi i casi un tale punto H è chiamato proiezione ortogonale del punto P sulla retta r. Con questa notazione risulta chiaro che $|\overline{PH}|$ è la distanza tra il punto $P(x, y)$ e la retta r e che H ha coordinate $(1, y)$.

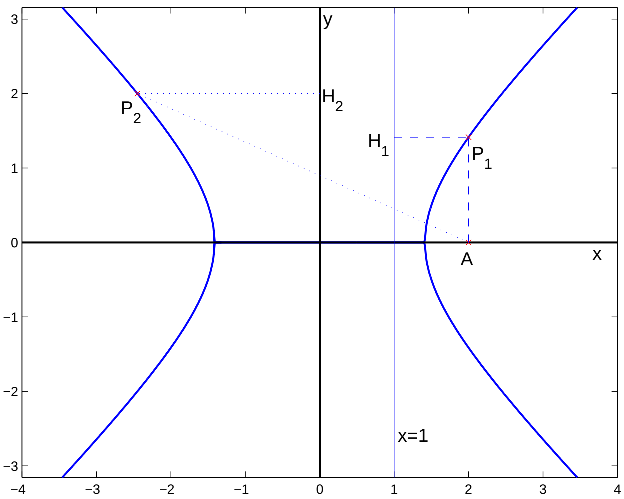


Figura 2.33: $x^2 - y^2 = 2$

Ricordiamo che dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano, la loro distanza si calcola con la seguente formula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Quindi la condizione $|\overline{PA}| = \sqrt{2} \cdot |\overline{PH}|$ determina l'equazione del luogo geometrico dato da

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2}$$

elevando tutto al quadrato si ottiene

$$(x-2)^2 + y^2 = 2(x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 2.$$

È una iperbole avente il grafico rappresentato nella Figura 2.33

7. Ricordiamo che una generica parabola con asse parallelo all'asse y è definita da un' equazione del tipo $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$. Sostituendo i valori delle coordinate nell'equazione della parabola, si deduce che i punti $A(-1, -1)$, $B(-3, 1)$ e $C(-2, 3)$ appartengono a $\mathcal{P}$ se è verificato il seguente sistema lineare nelle indeterminate a, b e c

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ 9a - 3b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + b - c \\ -9 + 9b - 9c - 3b + c - 3b + c = 1 \\ -4 + 4b - 4c - 2b + c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + b - c \\ 6b - 8c = 10 \\ 2b - 3c = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + b - c \\ b = \dfrac{4c+5}{3} \\ 8c + 10 - 9c = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -13 \\ c = 11 \end{cases}$$

La parabola $\mathcal{P}$ ha equazione $y = -3x^2 - 13x - 11$ ed è rappresentata nella Figura 2.34

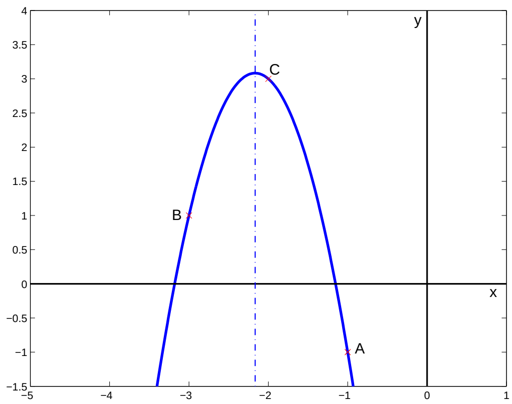


Figura 2.34: $y = -3x^2 - 13x - 11$

8. L'equazione di una una generica retta del piano è $y = mx + q$ o $x = c$ al variare di m e c in $\mathbb{R}$. Il fascio di rette che passa per il punto $(0, 2)$ è descritto da

$$\{r : x = 0\} \cup \{r : y = mx + 2 \mid m \in \mathbb{R}\}.$$

Una retta del fascio appena definito, ad eccezione della retta $x = 0$, interseca la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ nei punti con coordinate (x, y) che sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = mx + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

La condizione di tangenza si traduce nel chiedere che il sistema abbia solo una soluzione ma con molteplicità [12] due e quindi che l'equazione

$$x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (4m - 2)x + 4 = 0$$

ottenuta in modo ovvio dal sistema (2.10), abbia un'unica soluzione con molteplicità due. Ciò avviene se e solo se il discriminante di $(1 + m^2)x^2 + (4m - 2)x + 4 = 0$ è nullo

$$\Delta = (4m - 2)^2 - 16(1 + m^2) = -16m - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Quindi l'equazione di una tangente è $y = -\frac{3}{4}x + 2$. È immediato verificare che la retta $x = 0$ è una tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ con punto di tangenza $O(0, 0)$. Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.35.

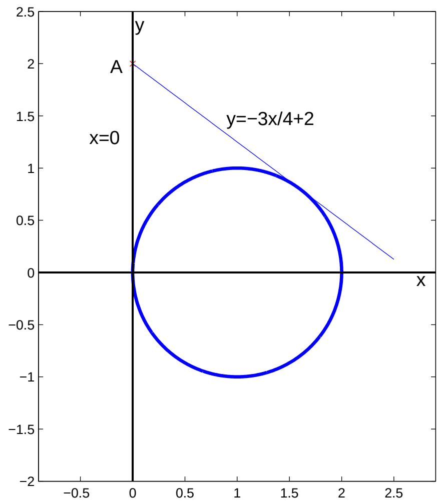


Figura 2.35: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

9. Usando il teorema di Carnot deduciamo che

$$|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2 - 2|\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| \cos A\hat{C}B} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos \frac{2}{3}\pi} = \sqrt{7}a.$$

Ora è sufficiente ricordarsi che il teorema dei seni afferma che in un triangolo il rapporto tra la lunghezza di un lato diviso il seno del suo angolo opposto è costante ed è uguale a due volte il raggio del cerchio circoscritto al triangolo. Dimostriamo questo fatto generale usando il triangolo ABC e il lato $\overline{AC}$.

Consideriamo il triangolo $AB'C$ dove B' è il punto della circonferenza circoscritta al triangolo ABC di posizione simmetrica ad A rispetto al centro O della suddetta circonferenza. La situazione grafica è rappresentata dalla Figura 2.36.

[12] Vedere il breve discorso sulla tangenza fatto nello svolgimento dell'Esercizio 8 del 27/9/02.

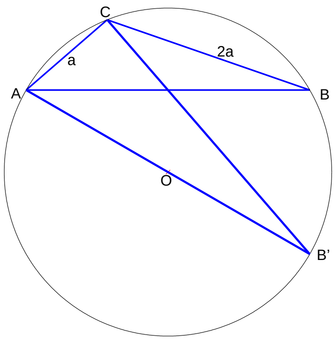


Figura 2.36: Es 9 del 15/11/04

Osserviamo che per costruzione il segmento $\overline{AB'}$ è un diametro del cerchio e quindi l'angolo $A\hat{C}B'$ è retto. Inoltre i due angoli $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ sono uguali perché insistono sullo stesso arco AC. Ora, essendo il triangolo $AB'C$ rettangolo, abbiamo

$$2r = |\overline{AB'}| = \frac{|\overline{AC}|}{\sin \hat{B}'} = \frac{|\overline{AC}|}{\sin \hat{B}}.$$

In modo del tutto equivalente, facendo i ragionamenti con l'arco CB e il triangolo $A'BC$, dove il punto A' è il punto della circonferenza circoscritta al triangolo ABC di posizione simmetrica a B rispetto al centro O, ricaviamo

$$\frac{|\overline{CB}|}{\sin \hat{A}'} = \frac{|\overline{CB}|}{\sin \hat{A}} = 2r.$$

Con qualche attenzione in più , essendo l'angolo $\hat{C} > \frac{\pi}{4}$, otteniamo

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin \hat{C}} = 2r$$

(provare a dimostrare questa ultima uguaglianza per esercizio).

Riepilogando, abbiamo dimostrato il teorema dei seni nella formulazione completa che coinvolge anche il raggio del cerchio circoscritto

$$\frac{|\overline{AC}|}{\sin \hat{B}} = \frac{|\overline{CB}|}{\sin \hat{A}} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \hat{C}} = 2r, \tag{2.11}$$

da cui deduciamo che

$$r = \frac{|\overline{AB}|}{2 \sin \hat{C}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Osserviamo che nella risoluzione dell' esercizio non era richiesta la dimostrazione del teorema dei seni. Ricordando la formula 2.11 la si poteva usare direttamente.

Un altro modo per risolvere l'esercizio, senza far uso del teorema dei seni, è il seguente. Sia O per il centro della circonferenza circoscritta, D per il punto medio di $\overline{AC}$ e E per il punto medio di $\overline{BC}$. Usiamo la notazione fissata nella Figura 2.37.

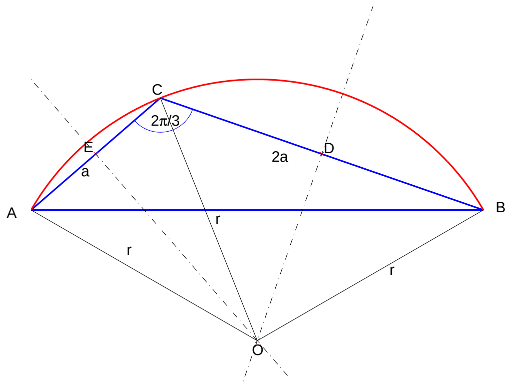


Figura 2.37: Es. 9 del 15/11/04

Considerando il triangolo rettangolo ODC ricaviamo che $r \cdot \cos A\hat{C}O = a/2$ e invece considerando il triangolo rettangolo COD otteniamo che $r \cdot \cos O\hat{C}B = a$ da cui deduciamo la seguente catena di identità

$$r = \frac{a}{2\cos A\hat{C}O} = \frac{a}{\cos O\hat{C}B}. \tag{2.12}$$

Sapendo che $O\hat{C}B = \frac{2}{3}\pi - A\hat{C}O$ otteniamo

$$\begin{aligned}\cos H\hat{C}B = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - A\hat{C}H\right) &= \cos\frac{2}{3}\pi\cos A\hat{C}H + \sin\frac{2}{3}\pi\sin A\hat{C}H = \\ &= -\frac{\cos A\hat{C}O}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin A\hat{C}O}{2}.\end{aligned}$$

Dalla precedente catena di identità otteniamo che

$$2\cos A\hat{C}O = -\frac{\cos A\hat{C}O}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin A\hat{C}O}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin A\hat{C}O = 5\cos A\hat{C}O. \tag{2.13}$$

In questa ultima uguaglianza posso sostituire $\sin A\hat{C}O$ con $\sqrt{1-\cos^2 A\hat{C}O}$. Infatti $\sin A\hat{C}O$ è sicuramente positivo e vale $\sin^2 A\hat{C}O + \cos^2 A\hat{C}O = 1$. In questo modo la (2.13) ci dice che $\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2 A\hat{C}O} = 5\cos A\hat{C}O$ ed elevando tutto al quadrato si ottiene

$$3\left(1-\cos^2 A\hat{C}O\right) = 25\cos^2 A\hat{C}O \quad \Leftrightarrow \quad 28\cos^2 A\hat{C}O = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \cos A\hat{C}O = \pm\sqrt{\frac{3}{28}}.$$

Essendo $A\hat{C}O < \pi/2$, e per ovvi motivi geometrici, prendiamo solo il valore positivo di $\cos A\hat{C}O$ per cui, dalla (2.12), ricaviamo

$$r = \frac{a}{2\cos A\hat{C}O} = a\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

10. (a) $\sqrt{3}\sin x - 1 - \cos x > 0$.

La disequazione è equivalente a $\sqrt{3}\sin x > 1 + \cos x$. Restringiamo lo studio all'intervallo $[0, 2\pi[$. Condizione necessaria, ma a priori non sufficiente, affinché x sia soluzione della disequazione è che

$x \in [0, \pi]$. Infatti $1 + \cos x \geq 0$ e quindi si deve verificare che $\sin x \geq 0$, che avviene se e solo se $x \in [0, \pi]$. In questa situazione $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Abbiamo usato l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e il fatto che la funzione seno è non nulla in $[0, \pi]$. La disequazione (a) diventa $\sqrt{3(1 - \cos^2 x)} > \cos x + 1$. Entrambi i termini della disequazione sono non negativi e quindi elevando tutto al quadrato otteniamo

$$3 - \cos^2 x > \cos^2 x + 2\cos x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0.$$

Il termine a sinistra di questa ultima disequazione si annulla con

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ +1/2 \end{cases}.$$

Essendo il coefficiente di $\cos^2 x$ positivo, si ha che la disequazione è verificata con

$$-1 < \cos x < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi.$$

In generale, considerando tutta la retta reale, l'insieme delle soluzioni della disequazione (a) è

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[.$$

Un altro modo più breve per risolvere la disequazione (a) è quello che fa uso della formula di sottrazione del seno:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin x - 1 - \cos x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin x - \cos x > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(b) Essendo π una costante positiva, la funzione $f(x)$ ha minimo nei punti in cui la funzione $\sin\frac{x}{2}$ assume il valore minimo. Tale valore è -1 ed è assunto negli angoli $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ al variare di k in $\mathbb{Z}$. Quindi la funzione $f(x)$ ha minimo in x tale che

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\pi + 4k\pi \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

2.5 Prova scritta del 14/3/05

1. Il polinomio $P(x)$ si scompone mediante raccoglimento parziale nel seguente modo

$$-x^3 + x^2 + 5x - 5 = -x^2(x-1) + 5(x-1) = -(x^2 - 5)(x-1) = -\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)(x-1).$$

Il dominio della funzione $f(x)$ è l'insieme di tutte le x tali che

$$0 \neq x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 \;\; e \;\; x \neq -2.$$

Ora semplifichiamo la funzione razionale $f(x)$

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2+x-2} = -\frac{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = -\frac{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)}{x+2}.$$

Ovviamente tale identità di funzioni vale solo nel dominio di definizione della funzione $f(x)$.

2. Ricordando che $\operatorname{ctg} x = \cos x/\sin x$, l'equazione diventa

$$\cos^2 x - \frac{\cos x}{2\sin x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x\left(\cos x - \frac{1}{2\sin x}\right) = 0.$$

Tale equazione ha soluzioni con x tale che $\cos x = 0$ e

$$\cos x - \frac{1}{2\sin x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2\cos x \sin x = \sin 2x.$$

Nell'ultima identità abbiamo usato la formula di duplicazione del seno. Dunque

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ e } \ \sin 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Cioè con $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi l'equazione ha soluzione in $x = \pi/2 + k\pi$ e $x = \pi/4 + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.38

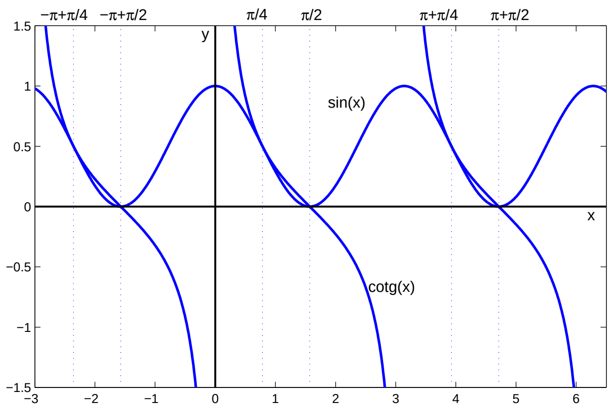


Figura 2.38: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x$

3. Il dominio di definizione della disequazione è

$$D =]-3, +\infty[\cup \{|x| \neq 1\} =]-3, +\infty[\cup \{x \neq \pm 1\} = [-3, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty).$$

Riscriviamo la disequazione (a) nel seguente modo

$$0 < \frac{\sqrt{x+3} - 2|x|}{|x|-1} + 2 = \frac{\sqrt{x+3} - 2|x| + 2|x| - 2}{|x|-1} = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{|x|-1}$$

Caso $|x| - 1 > 0$. Nel dominio della disequazione si ha quando $x \in [-3, -1[\cup]1, +\infty[$. In questa situazione è sufficiente determinare le x per cui $\sqrt{x+3} - 2 > 0$, ovvero $\sqrt{x+3} > 2$. Elevando entrambi i membri dell'ultima disequazione al quadrato otteniamo $x + 3 > 4$ e quindi $x > 1$. Quindi in questo caso si ha che l'insieme delle soluzioni sono tutte le $x \in]1, +\infty[$.

Caso $|x| - 1 > 0$. Nel dominio della disequazione si ha quando $x \in]-1, 1[$. In questa situazione è sufficiente determinare le x per cui $\sqrt{x+3} - 2 < 0$, ovvero $\sqrt{x+3} < 2$. Elevando entrambi i membri dell'ultima disequazione al quadrato otteniamo $x + 3 < 4$ e quindi $x < 1$. Quindi in questo caso si ha che l'insieme delle soluzioni sono tutte le $x \in]-1, 1[$.

Perciò l'insieme delle soluzioni della disequazione (a) è l'unione delle soluzioni trovate nei precedenti due casi e quindi sono tutte e sole le $x \in]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

4. Ricordiamo che vale $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Da questo si deduce immediatamente che

$$\begin{aligned} c &= (6^{1/3} - \sqrt[3]{2})^{1/2}\sqrt{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{12} + 4^{1/3}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}}\sqrt{\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{6}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ora usando la formula della differenza di due cubi

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

otteniamo, sostituendo a con $\sqrt[3]{6}$ e b con $\sqrt[3]{2}$ in (2.14)

$$c = \sqrt{\left(\sqrt[3]{6}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \sqrt{4} = 2$$

5. Risolviamo questo esercizio facendo la divisione euclidea del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$. In questo modo otteniamo due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che $P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$ e il grado di $r(x)$ è al più uno. Troveremo che i coefficienti del polinomio $R(x)$ sono funzioni di a e b. Il polinomio $P(x)$ è divisibile da $Q(x)$ per i valori di a e b per cui $R(x)$ è il polinomio nullo.
Ora facciamo la divisione euclidea: prendiamo il monomio di grado più alto del dividendo $P(x)$ e lo dividiamo per il monomio di grado più alto del divisore $Q(x)$, ottenendo x^2. Questo sarà il primo monomio del polinomio quoziente $q(x)$ e lo mettiamo nella seconda riga della seconda colonna della seguente tabella

$$\begin{array}{ccccc|l} x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6} & & & & & x^2 \end{array}$$

dove nella prima riga della prima colonna c'è il polinomio $P(x)$. N.B. abbiamo messo anche il termine x^3 che è chiaramente rappresentato dallo zero. Nella prima riga della seconda colonna c'è il polinomio $Q(x)$. Moltiplichiamo x^2 per $Q(x)$ e il risultato lo mettiamo nella seconda riga della prima colonna

$$\begin{array}{ccccc|l} x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6} x^4 & bx^3 & 2x^2 & 0 & 0 & x^2 \end{array}$$

Adesso calcoliamo la differenza tra i polinomi della prima colonna, il risultato lo mettiamo nella terza riga della prima colonna della tabella

$$\begin{array}{ccccc|l} x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6} x^4 & bx^3 & 2x^2 & 0 & 0 & x^2 \\ \hline 0 & -bx^3 & +(a-2)x^2 & -x & +1 & \end{array}$$

Ricominciamo con la procedura appena eseguita ma con questo ultimo polinomio $-bx^3 + (a - 2)x^2 - x + 1$ al posto del polinomio $P(x)$. Quindi dividiamo $-bx^3$ per x^2 ottenendo $-bx$. Questo ultimo monomio sarà il secondo del polinomio $q(x)$ e quindi lo aggiungiamo nella seconda riga della seconda colonna della tabella. Moltiplichiamo $-bx$ per $x^2 + bx + 2$ e il risultato lo mettiamo nella prima colonna

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6}
x^4 & bx^3 & 2x^2 & 0 & 0 & x^2 - bx \\ \cline{1-5}
0 & -bx^3 & +(a-2)x^2 & -x & +1 & \\
 & -bx^3 & -b^2x^2 & -2bx & 0 &
\end{array}
$$

adesso calcoliamo il polinomio che si ottiene sottraendo l'ultimo polinomio al penultimo della prima colonna e lo aggiungiamo di seguito

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6}
x^4 & bx^3 & 2x^2 & 0 & 0 & x^2 - bx \\ \cline{1-5}
0 & -bx^3 & +(a-2)x^2 & -x & +1 & \\
 & -bx^3 & -b^2x^2 & -2bx & 0 & \\ \cline{1-5}
 & 0 & (a - 2 + b^2)x^2 & (-1 + 2b)x & +1 &
\end{array}
$$

Ripetiamo di nuovo la procedura. Quindi dividiamo $(a - 2 + b^2)x^2$ per x^2 ottenendo $a - 2 + b^2$. Questo ultimo monomio sarà il terzo del polinomio $q(x)$ e quindi lo aggiungiamo nella seconda riga della seconda colonna della tabella. Moltiplichiamo $a - 2 + b^2$ per $x^2 + bx + 2$ e il risultato lo mettiamo nella prima colonna

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & +0 & +ax^2 & -x & +1 & x^2 + bx + 2 \\ \cline{6-6}
x^4 & bx^3 & 2x^2 & 0 & 0 & x^2 - bx + a - 2 + b^2 \\ \cline{1-5}
0 & -bx^3 & +(a-2)x^2 & -x & +1 & \\
0 & -bx^3 & -b^2x^2 & -2bx & 0 & \\ \cline{1-5}
 & 0 & (a - 2 + b^2)x^2 & (-1 + 2b)x & +1 & \\
 & & (a - 2 + b^2)x^2 & (a - 2 + b^2)bx & +2a - 4 + 2b^2 &
\end{array}
$$

Finalmente otteniamo $r(x) = (-1 + 2b - ab + 2b - b^3)x + 5 - 2a - 2b^2$ sottraendo l'ultimo polinomio al penultimo della prima colonna dell'ultima tabella. Il polinomio $r(x)$ è identicamente nullo se e solo se a e b soddisfano il seguente sistema

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} -1 + 2b - ab + 2b - b^3 = 0 \\ 5 - 2a - 2b^2 = 0 \end{cases}
\quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 + 2b - \dfrac{5 - 2b^2}{2} b + 2b - b^3 = 0 \\ a = \dfrac{5 - 2b^2}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 2/3 \\ a = 37/18 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Con questi valori di a e b otteniamo che

$$P(x) = x^4 + \frac{37}{18}x^2 - x + 1 \quad e \quad Q(x) = x^2 + \frac{2}{3} + 2$$

e
$$x^4 + \frac{37}{18}x^2 - x + 1 = \left(x^2 + \frac{2}{3} + 2\right)\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right).$$

6. Un opportuno sistema di riferimento Oxy è quello in cui la retta r diventa l'asse delle y, e la retta s diventa l'asse delle x e O il punto di intersezione tra r ed s. Così ci siamo messi nelle condizioni dell'esercizio **9** della prova scritta del 28/09/01. Infatti è evidente che il punto B avrà coordinate $(t, 0)$ con $t \in [0, l]$. Quindi lo svolgimento sarà lo stesso, ma per completezza di informazione lo rifaremo con i nuovi dati. Ricordiamo che la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è
$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
e il punto medio ha coordinate $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$. Quindi per ogni $t \in [0, l]$ avremo $B(t)(t, 0)$ e $A(t)(0, y_t)$ dove y_t è una delle due soluzioni all'equazione
$$y_t^2 + t^2 = l^2$$
cioè $y_t = \pm\sqrt{l^2 - t^2}$. Quindi l'equazione parametrica del punto medio tra $A(t)$ e $B(t)$ è
$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{l^2 - t^2}}{2} \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, l].$$
Osserviamo che ogni tale (x, y) verifica
$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{l^2 - t^2}{4} = \frac{l^2}{4}.$$
Cioè, al variare di t in $[0, l]$, il punto medio del segmento $\overline{A(t)B(t)}$ è un punto della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $l/2$. Guardare la Figura 2.39.

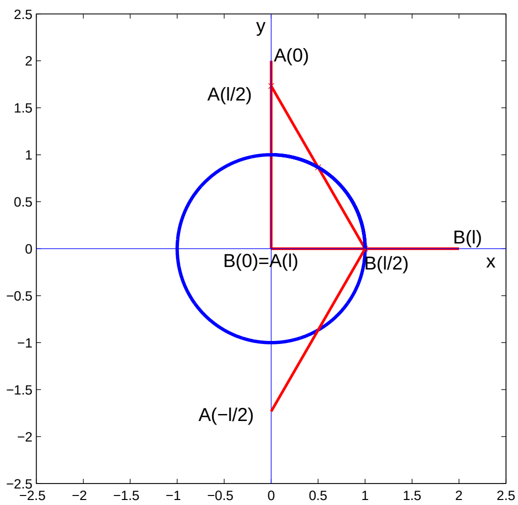


Figura 2.39: Es. 6 del 14/3/05

7. Sia $P = (x, 3x + 4)$ un generico punto della retta $3x - y + 4 = 0$. Usando la formula per la distanza descritta nel precedente esercizio otteniamo che
$$|\overline{AP}| = \sqrt{(x - 1)^2 + 9x^2} = \sqrt{10x^2 - 2x + 1}$$

e

$$|\overline{BP}| = \sqrt{(x+2)^2 + (3x+3)^2} = \sqrt{10x^2 + 22x + 13}.$$

Il punto P è centro del cerchio che passa per A e B se $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$, che equivale a chiedere che

$$10x^2 - 2x + 1 = 10x^2 + 22x + 13 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Quindi il punto cercato che denotiamo con C avrà coordinate $(-1/2, 5/2)$.
Ovviamente il raggio del cerchio è

$$r = |\overline{AP}| = \sqrt{10\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Quindi l'equazione del cerchio è

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

Per avere chiaro lo svolgimento di questo esercizio guardare anche la Figura 2.40 che rappresenta gli oggetti geometrici studiati.

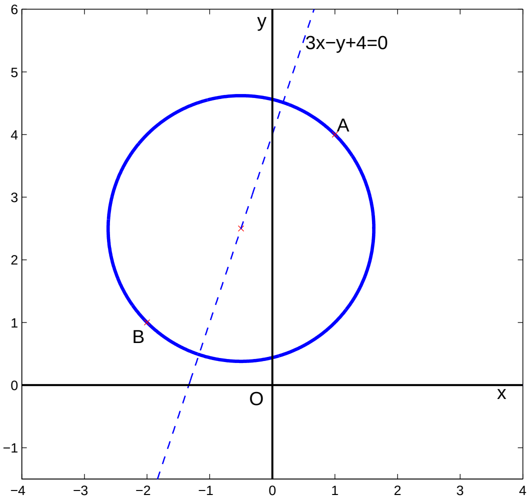


Figura 2.40: Es. 7 del 14/3/05

8. La retta di equazione $r : 2x - y + \sqrt{3} = 0$ la riscriviamo nella forma esplicita $y = 2x + \sqrt{3}$. Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. Quindi una generica retta parallela a r è definita da un'equazione del tipo $y = 2x + q$. Ora se imponiamo che una tale retta passi per l'origine $(0, 0)$, deduciamo che la retta è $y = 2x$. Infine il punto $A(-1, b)$ appartiene alla retta $y = 2x$ se e solo se $b = -2$.
Per determinare la distanza tra le due rette basta prendere una qualsiasi retta perpendicolare alle due rette, cioè che le incida con un angolo retto, e calcolare la distanza tra i punti di intersezione con le due rette. Ricordiamo che due rette $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono perpendicolari se e solo se $m' = -1/m$ se $m \neq 0$. Altrimenti Se $m = 0$ una perpendicolare sarà $x = c$ con un qualsiasi numero reale c.
Come perpendicolare prendiamo la retta $y = -x/2$. Si calcola immediatamente che i due punti di

intersezione con le altre due rette sono il punto $O(0,0)$ e il punto P le cui coordinate (x,y) soddisfa il sistema

$$\begin{cases} y = 2x + \sqrt{3} \\ y = -\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 2x + \sqrt{3} \\ y = -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{5} \end{cases} .$$

Da cui risulta che la distanza tra la due rette è

$$|\overline{PO}| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Graficamente la situazione è riportata nella Figura 2.41

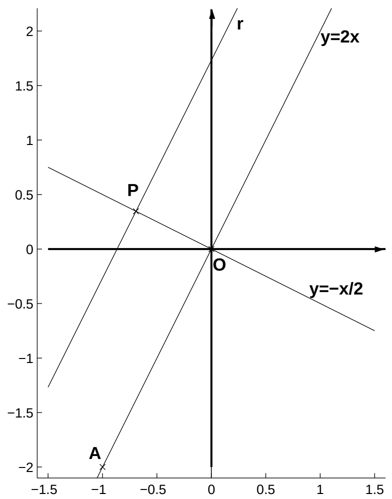


Figura 2.41: Es. 8 del 14/3/05

9. Ricordiamo che la mediana di un triangolo è un segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto al vertice stesso. Conoscendo $\beta = A\hat{M}B$ e $\overline{AM}$, vorremmo applicare il teorema di Carnot ai lati $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ del triangolo AMB. Non conosciamo il valore di $|\overline{MB}|$, ma con poco sforzo siamo in grado di calcolare $|\overline{CM}| = |\overline{MB}|$ usando i teoremi noti di trigonometria sul triangolo AMC. Graficamente la situazione è riprodotta nella Figura 2.42

Osserviamo che $A\hat{M}C = \pi - \beta$ da cui deduciamo che

$$M\hat{C}A = \pi - \alpha - p + \beta = \beta - \alpha = \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}.$$

Ora basta applicare il teorema dei seni (già usato nell'es. 10 del 28/9/01) per ottenere che

$$|\overline{CM}| = \frac{\sin\alpha}{\sin M\hat{C}A} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Infine usiamo il teorema di Carnot (già usato nell'es. 9 del 19/9/03) deducendo che

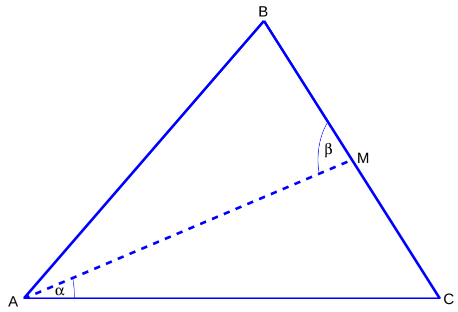


Figura 2.42: Es. 9 del 14/3/05

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{|\overline{AM}|^2 + |\overline{MB}|^2 - 2|\overline{AM}|\cdot|\overline{MB}|\cos\beta} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4-2\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{3}}.\end{aligned}$$

10. Come al solito studiamo la disequazione solo nell'intervallo $[0, 2\pi)$ e poi estendiamo la soluzione per periodicità 2π. Essendo sia $\sqrt{3}\cos x$ che $\sin x$ sempre minori di 2, allora appena uno dei due è non positivo la disuguaglianza sarà banalmente verificata. Quindi è sufficiente studiare la disequazione nell'intervallo $]0, \pi/2[$ che è l'insieme in cui sia $\cos x$ che $\sin x$ sono positivi. In $]0, \pi/2[$ vale $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Quindi la disequazione diventa

$$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{1-\cos^2 x} < 2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{1-\cos^2 x} < \sqrt{3}\cos x + 2.$$

Questa ultima disuguaglianza, essendo entrambi i termini positivi, è equivalente a

$$1 - \cos^2 x < 3\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 4 \quad\Leftrightarrow\quad (2\cos x - \sqrt{3})^2 > 0$$

che è chiaramente verificata se e solo se

$$\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x \neq \frac{\pi}{6} \quad \text{in } (0, \pi/2).$$

Quindi, in generale su tutta la retta reale, l'insieme delle soluzioni sono tutte e sole le x tali che

$$x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

2.6 Prova scritta del 20/6/05

1. Chiaramente il dominio della funzione razionale è costituito da tutte e sole le x per cui non si annulla il denominatore. Dalla formula per la differenza di due cubi $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ deduciamo immediatamente che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Il discriminante del polinomio $x^2 + x + 1$ è -3 e quindi non ammette radici reali. Perciò il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

Ora fattorizziamo il polinomio x^3-4x+3. Si vede immediatamente che 1 è una sua radice e quindi, per il teorema di Ruffini, è diviso da $(x-1)$. Con facili calcoli[13] otteniamo

$$x^3-4x+3=(x-1)(x^2+x-3)$$

perciò

$$f(x)=\frac{x^3-4x+3}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x^2+x-3)}{(x^2+x+1)}.$$

Le considerazioni fatte prima su x^2+x+1 ci fanno capire che non si può semplificare ulteriormente la rappresentazione della funzione razionale.

2. Essendoci la funzione tangente, il dominio di definizione dell'equazione è $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pi/2+k\pi\ \ \forall k\in\mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x=\operatorname{tg}x \quad &\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x-\frac{\sin x}{\cos x}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x}(2\sin x\cos x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}x(\sin 2x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}x=0\quad o\quad \sin 2x=1\\
&\Leftrightarrow\quad x=k\pi\quad o\quad 2x=\frac{x}{2}+2k\pi\qquad\forall k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow\quad x=k\pi\quad o\quad x=\frac{x}{4}+k\pi\qquad\forall k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

3. Essendoci le radici quadrate, il dominio di definizione dell'equazione è

$$D=[1,+\infty[\cap[-1,+\infty[\cap]-\infty,6]=[1,6].$$

Elevando entrambi i membri dell'equazione al quadrato otteniamo

$$x-1+x+1+2\sqrt{(x-1)(x+1)}=6-x\quad\Leftrightarrow\quad 3x-6=-2\sqrt{x^2-1} \tag{2.15}$$

$$\Leftrightarrow\quad 9x^2-36x+36=4x^2-4\quad \text{e}\quad 3x-6\leq 0. \tag{2.16}$$

N.B. L'equazione in (2.16) è stata ottenuta da (2.15) elevando entrambi i membri al quadrato. Perciò dobbiamo porre la condizione $3x-6\leq 0$ affinché ambo i membri abbiano lo stesso segno positivo. Se non avessimo aggiunto tale condizione avremmo avuto solo l'implicazione che se x soddisfa la (2.16) allora $9x^2-36x+36=4x^2-4$ e, in generale, l'implicazione inversa non è vera. Ovviamente la condizione $3x-6\leq 0$ è dovuta dal fatto che $-2\sqrt{x^2-1}$ è sempre ≤ 0.

Dato che $x\in D=[1,6]$ e $3x-6\leq 0$, la (2.16) è equivalente a

$$\begin{aligned}
5x^2-36x+40=0\quad \text{e}\quad x\in[1,2]\quad &\Leftrightarrow\quad x=\frac{18\pm\sqrt{18^2-200}}{5}\quad \text{e}\quad x\in[1,2]\\
&\Leftrightarrow\quad x=\frac{18\pm\sqrt{124}}{5}\quad \text{e}\quad x\in[1,2]\\
&\Leftrightarrow\quad x=\frac{18-\sqrt{124}}{5}\quad \left(\text{perché }\frac{18+\sqrt{124}}{5}>2\right).
\end{aligned}$$

[13] Vedere per esempio la risoluzione dell'esercizio 5 della prova del 14/3/05 oppure l'esercizio 5 del 15/11/04.

4. L'equivalenza è falsa. Infatti, per tutte le $x < 6$, cioè $x - 6 < 0$, moltiplicando per $x - 6$ la disequazione cambia verso. Perciò l'equivalenza vera è la seguente

$$\frac{x-1}{x-6} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \leq x-6 \\ x-6 > 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x-1 \geq x-6 \\ x-6 < 0 \end{cases} .$$

5. In generale si ha che $a^2 = b^2$ è equivalente ad $a = \pm b$, dove a e b possono essere dei numeri ma anche delle espressioni algebriche, per esempio polinomi. Ma se si sa che a e b hanno segno concorde (discorde) allora $a^2 = b^2$ è equivalente ad $a = b$ $(a = -b)$. Questa osservazione preliminare, essendo $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ nell'intervallo $[1, 2]$, fa capire la veridicità della seguente serie di equivalenze

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2|x-2| = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2(2-x) = 4 \quad \text{essendo } 1 \leq x \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 4 - 2x = 4.
\end{aligned}$$

N.B. La condizione $x \geq 1$ caratterizza anche l'insieme di definizione di $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$. Provare a fare i calcoli. Ora facciamo vedere il perché della "strana" condizione $x \in [1, 2]$.
Ricordiamo la formula dei radicali doppi

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

che è molto utile quando $A^2 - B$ è un quadrato perfetto. Usando tale formula con $A = x$, $B = 4x - 4$ e $A^2 - B = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x + \sqrt{4x-4}} \\
&= \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x-2|}{2}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x + \sqrt{4x-4}} \\
&= \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} - \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} - \sqrt{\frac{x - |x-2|}{2}}
\end{aligned}$$

da cui segue che se $x \geq 1$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}=\left[\begin{array}{l}2 \ \text{ se } 1\le x\le 2\\ \\ 2\sqrt{x-1} \ \text{ se } x>2\end{array}\right. .$$

Nella Figura 2.44 è rappresentato il grafico della funzione

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

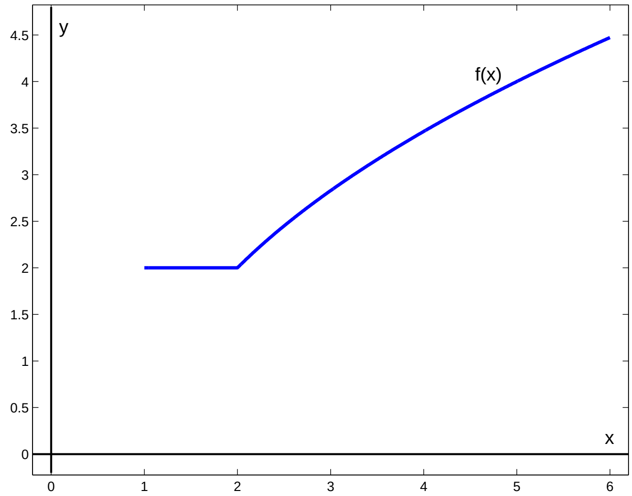


Figura 2.43: Es. 5 del 20/06/05

6. Riscriviamo l'equazione $x^2+y^2+2x-8y+1=0$ nel seguente modo

$$x^2+2x+1+y^2-8y+16-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+(y-4)^2=16$$

che definisce una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(-1,4)$ e raggio di lunghezza 4.

È di immediata verifica il fatto che la retta di equazione $x=0$ non è tangente alla circonferenza. Perciò , per determinare le rette tangenti richieste dal testo dell'esercizio, dobbiamo cercare i valori di $m\in\mathbb{R}$ tali che la retta $y=mx$ (passante per l'origine) abbia solo un punto di intersezione (con molteplicità 2) con la circonferenza. Equivale a determinare $m\in\mathbb{R}$ tale che il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-8y+1=0\\ y=mx\end{cases} \tag{2.17}$$

ammetta una sola soluzione doppia.

Il sistema (2.17) è equivalente a

$$\begin{cases} x^2+m^2x^2+2x-8mx+1=0\\ y=mx\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(1+m^2)x^2+2(1-4m)x+1=0\\ y=mx\end{cases}$$

che ha un'unica soluzione se e solo il discriminante del polinomio di secondo grado di questo ultimo sistema ha discriminante uguale a zero, ovvero

$$0=\Delta=4[(1-4m)^2-(1+m^2)]=4(1+16m^2-8m-1-m^2)=4m(15m-8).$$

Quindi il discriminante si annulla con $m=0$ o $m=8/15$. Le due tangenti sono

$$y=0 \quad \text{e} \quad y=\frac{8}{15}x.$$

Si può dimostrare facilmente che un parallelogramma, che ha tutti e quattro i lati tangenti a una circonferenza, ha tutti i lati uguali ed altezza congrua ad un diametro. Basta semplicemente applicare alcuni principi di identità tra alcuni triangoli ottenuti suddividendo opportunamente la superficie del parallelogramma. Provare a dimostrare questo fatto per esercizio.

Usiamo la notazione della Figura 2.44

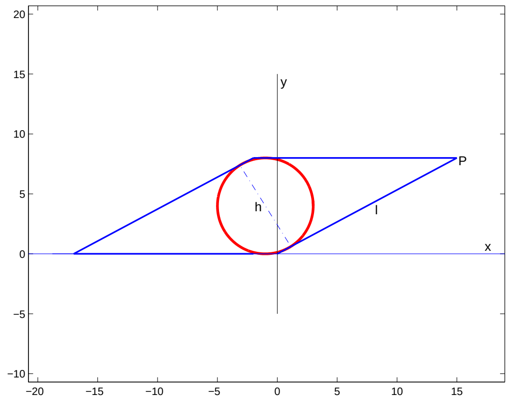


Figura 2.44: Es. 6 del 20/06/05

Essendo il punto $(-1, 0)$ punto di tangenza (si tratta del punto d' intersezione della tangente $y = 0$ con la circonferenza), il punto $(-1, 8)$ è di tangenza con la retta $y = 8$. Perciò il punto $P(15, 8)$ che si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{15}x \\ y = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 8 \end{cases}$$

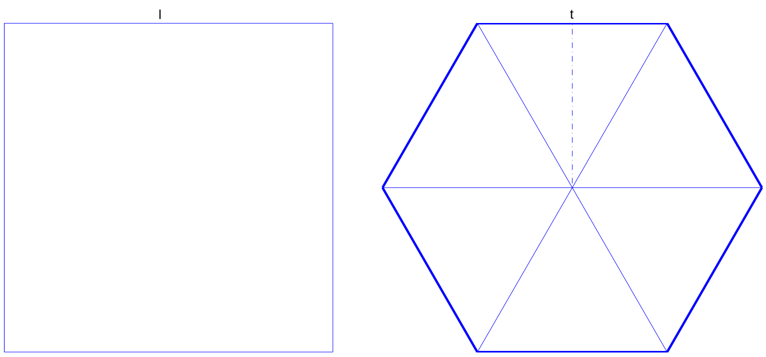
è un vertice del parallelogramma. Ora è immediato determinarne la lunghezza dei lati

$$l = d(P, O) = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

da cui si deduce che l'area del parallelogramma è

$$l \cdot h = 17 \cdot 8 = 136.$$

7. Supponiamo di avere un quadrato di lato l ed un esagono regolare di lato t.



L'esagono regolare ha area uguale a

$$\frac{1}{2}\left(t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cdot 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2. \tag{2.18}$$

Abbiamo calcolato questa area prendendo sei volte quella di un triangolo equilatero di lato t. Il quadrato avrà area l^2 e perimetro $4 \cdot l$. Supponiamo che anche l'esagono regolare abbia area l^2. Quindi da (2.18) otteniamo

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 = l^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}l^2$$

ed essendo sia l che t positivi, equivale a $t = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}l$. Questo ci dice che il perimetro dell'esagono regolare di area l^2 ha perimetro uguale a $t = 6\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}l$. Ora con i seguenti calcoli elementari deduciamo che a parità di area è il quadrato ad avere il perimetro maggiore:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}l \leq 4l \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \leq \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Curiosità . Siano n e m interi positivi qualsiasi. Se $n < m$, a parità di area, il poligono regolare con n lati ha perimetro maggiore rispetto a quello con m lati. Con le nozioni di matematica che acquisirete nei successivi corsi universitari sarà molto facile dimostrare questo fatto.

8. Ricordiamo che l'equazione di una retta (non parallela all'asse delle y) è del tipo $y = mx + q$, dove m è il valore della tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x. Perciò la retta cercata avrà equazione

$$y = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} + q = -\sqrt{3}x + q.$$

Ora imponiamo che la retta passi per il punto $A(0, 3)$ ottenendo che $3 = 0 + q$, ovvero che $q = 3$. L'equazione della retta è $y = -\sqrt{3}x + 3$.

9. Come risulta dalla Figura 2.45

l'angolo α è uno degli angoli non retti del triangolo rettangolo avente l'altezza del parallelopipedo come cateto opposto ad α e la diagonale della base quadrata come cateto adiacente ad α. Questo ultimo lato ha lunghezza $12\sqrt{2}$ e quindi si ha

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{12\sqrt{2}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}.$$

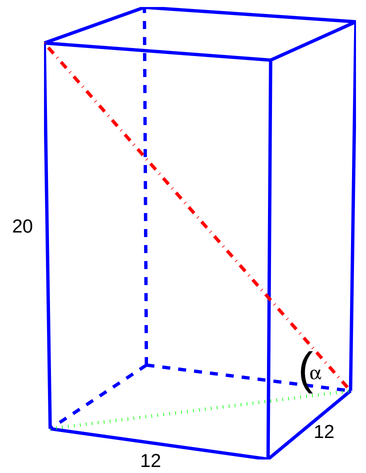


Figura 2.45: Es. 9 del 20/06/05

Per determinare $\sin 2\alpha$ usiamo la formula parametrica del seno che dice che

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} \quad \text{per ogni } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

da cui si ottiene, essendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{\frac{10}{3\sqrt{2}}}{1+\frac{25}{18}} = \frac{\frac{10}{3\sqrt{2}}}{\frac{43}{18}} = \frac{60}{43\sqrt{2}}.$$

10. Ricordando che per ogni angolo α vale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, deduciamo che la disequazione del testo diventa

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin x + \cos x \leq 0.$$

Ora dividendo tutto per 2 otteniamo[14]

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \leq 0. \tag{2.19}$$

Essendo $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, usando la formula di addizione del seno, la (2.19) diventa

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$$

che ha soluzioni in tutte e sole le x tali che

$$\pi + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

cioè

[14]Usiamo il solito metodo per cui avendo una disequazione (o equazione) del tipo $a\sin x + b\cos x > c$ dividiamo tutto per $\sqrt{a^2+b^2}$ cercando poi l'unico angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ tale che $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ e $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Un altro modo di risolvere la (2.19) è quello di dividere tutto per $\cos x$ ottenendo che la (2.19) è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1 \leq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1 \geq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}\pi.$$

Provate a svolgere nel dettaglio questo ultimo procedimento.

2.7 Prova scritta del 1/9/05

1. Il dominio D della $f(x)$ è l'insieme di tutte e sole le $x \in \mathbb{R}$ tali che il denominatore non si annulla, cioè

$$0 \neq x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x+2) + x + 2 = (x^2+1)(x+2)$$

e quindi, essendo $x^2 + 1$ sempre positivo, si ha $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$.

Ora semplifichiamo la funzione razionale

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^4 + 3x^3 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \frac{2(x^4 - 1) + 3x(x^2 + 1)}{(x^2+1)(x+2)} = \\ &= \frac{2(x^2-1)(x^2+1) + 3x(x^2+1)}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{(x^2+1)(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)(x+2)} = \\ &= \frac{(2x^2+3x-2)}{(x+2)} = \frac{(2x^2+4x-x-2)}{(x+2)} = \\ &= \frac{2x(x+2)-(x+2)}{(x+2)} = \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)} = 2x - 1. \end{aligned}$$

2. Ricordiamo la formula di duplicazione del seno $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Usandola nella disequazione otteniamo

$$\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) > 0$$

Per ora studiamo la disequazione solo in $[0, 2\pi[$. Ricordiamo che in questo intervallo

$$\begin{aligned} &\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{3}{2}\pi \\ &1 - 2\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \text{ e } x = \frac{5}{6}\pi \\ &1 + 2\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{6}\pi \text{ e } x = \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

da cui si deduce la situazione dei segni rappresentata nella Figura 2.46

Perciò l'insieme delle soluzioni su tutto $\mathbb{R}$ è

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in \left] -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{5}{6}\pi + 2k, \frac{7}{6} + 2k \right[\quad \forall k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Possiamo riscrivere il sistema nel seguente modo

$$\begin{cases} 2\cos x\cos y = 1 \\ \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y} = 2 \end{cases}$$

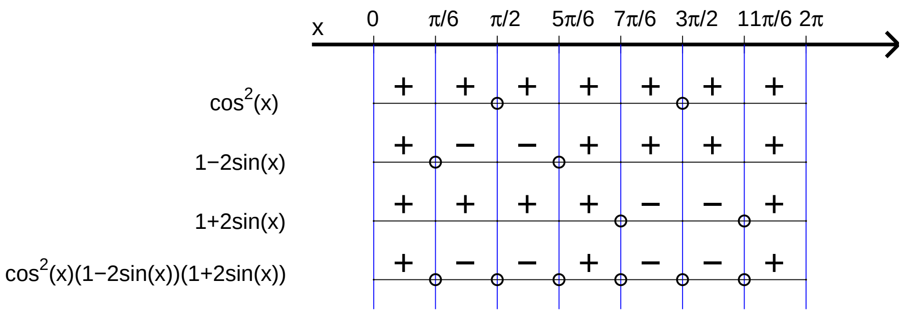


Figura 2.46: Es. 2 del 1/9/05

nella seconda equazione, in virtù della prima, possiamo sostituire $\dfrac{1}{2\cos y}$ a $\cos x$ e $\dfrac{1}{2\cos x}$ a $\cos y$ ottenendo

$$\begin{cases} 2\cos x\cos y = 1 \\ \dfrac{\sin x}{\frac{1}{2\cos y}} + \dfrac{\sin y}{\frac{1}{2\cos x}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x\cos y = 1 \\ 2\sin x\cos y + 2\sin y\cos x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x\cos y = 1 \\ 2\sin(x+y) = 2 \end{cases}.$$

La seconda equazione, ottenuta usando la formula di addizione del seno, equivale a chiedere che

$$\sin(x+y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Andiamo a imporre questa condizione nella prima equazione del sistema ottenendo

$$1 = 2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos x\sin x = \sin 2x$$

abbiamo usato la formula di addizione del coseno e quella di duplicazione del seno. Ora è immediato verificare che

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \;\; \text{cioè} \quad x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \;\; \forall k_1 \in \mathbb{Z}.$$

e da (2.20)

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{4} - k_1\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - k_1\pi \;\; \forall k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Chiaramente k_1 è pari se e solo se lo è anche $2k - k_1$ perciò l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{\pi}{4} + t_1\pi,\; y = \frac{\pi}{4} + t_2\pi \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \;\text{ tali che } t_1 - t_2 \text{ è pari}\right\}.$$

4. Dovendo risolvere l'equazione

$$\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x-3}, \tag{2.21}$$

chiaramente, bisogna porre la condizione $x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1$, perciò si ha $\sqrt{x-1} \geq 0$. Da questo si capisce che bisogna anche porre la condizione $\sqrt[3]{x-3} \geq 0$ equivalente a $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$. Perciò il dominio di definizione dell'equazione è

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}.$$

Elevando entrambi i membri dell'equazione (2.21) alla sesta otteniamo

$$(x-1)^3 = (x-3)^2 \tag{2.22}$$

che in generale non è equivalente a quella in (2.21). Infatti, a priori, l'equazione (2.22) ha più radici rispetto a quella in (2.21). Vedremo che questo non è un problema.
L'equazione (2.22) diventa

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - 6x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0. \tag{2.23}$$

Il polinomio $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ può essere riscritto nel seguente modo

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 9x - 10 &= x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + 5x - 10 = x^2(x-2) - 2x(x-2) + 5(x-2) = \\ &= (x-2)(x^2 - 2x + 5) = (x-2)(x^2 - 2x + 1 + 4) = (x-2)[(x-1)^2 + 4]. \end{aligned}$$

Perciò l'equazione in (2.23) diventa

$$(x-2)[(x-1)^2 + 4] = 0.$$

Chiaramente $(x-1)^2 + 4$ non può mai annullarsi e quindi visto che $2 \notin D$ l'equazione (2.22) non ha soluzioni in D e perciò neanche quella in (2.21).

5. Dovendo risolvere la disequazione, con i valori assoluti,

$$|x-2| - 2|x+1| < 1 \tag{2.24}$$

è conveniente suddividere lo studio della disequazione nei seguenti tre casi.

Caso $x \in]-\infty, -1]$. La disequazione (2.24) diventa

$$-x + 2 + 2x + 2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3.$$

Perciò in questo caso l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $]-\infty, -3[$.

Caso $x \in]-1, 2]$. La disequazione (2.24) diventa

$$-x + 2 - 2x - 2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{3}.$$

In questo caso l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $]-1/3, 2]$.

Caso $x \in]2, +\infty[$. La disequazione (2.24) diventa

$$x - 2 - 2x - 2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x > -5.$$

In questo caso l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $]2, +\infty[$.

Analizzati questi tre casi possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (2.24) è

$$]-\infty, -3[\cup \left]-\frac{1}{3}, 2\right] \cup]2, +\infty[=]-\infty, -3[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

6. Bisogna trovare i valori di x_1, x_2 per cui è verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 10 \end{cases}. \tag{2.25}$$

In pratica dobbiamo trovare le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole e della circonferenza definite, rispettivamente, dalla prima e dalla seconda equazione del sistema (2.25). A meno di presenza di punti di tangenza e altri casi particolari, ci si aspetta di trovare quattro soluzioni. Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.47

Riscriviamo la seconda equazione del sistema (2.25) nel seguente modo

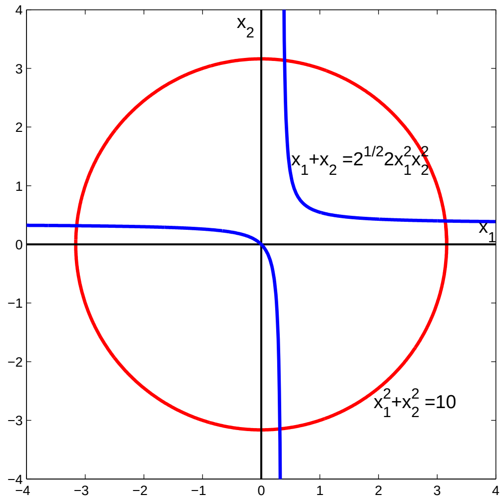


Figura 2.47: Es. 6 del 1/9/05

$$(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

usando la prima equazione del sistema (2.25) si ricava $8x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 = 10$, cioè $4x_1^2x_2^2 - x_1x_2 - 5 = 0$. A questo punto si vede facilmente che

$$0 = 4x_1^2x_2^2 - x_1x_2 - 5 = 4x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2 - 5x_1x_2 - 5 = 4x_1x_2(x_1x_2 + 1) - 5(x_1x_2 + 1) = (4x_1x_2 - 5)(x_1x_2 + 1).$$

In questo modo abbiamo dimostrato che il sistema (2.25) è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}x_1x_2 \\ (4x_1x_2 - 5)(x_1x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente a

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}x_1x_2 \\ x_1x_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}x_1x_2 \\ 4x_1x_2 - 5 = 0 \end{cases} .$$

Perciò le soluzioni cercate sono l'unione delle soluzioni di (a) e (b).
Il sistema (a) è equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -2\sqrt{2} \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2\sqrt{2} \\ (-x_2 - 2\sqrt{2})x_2 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2\sqrt{2} \\ x_2^2 + 2\sqrt{2}x_2 - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \mp \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \end{cases} . \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni del sistema (a) sono

$$(x_1, x_2) = \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$$

Il sistema (b) è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ \left(-x_2 + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)x_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ 4x_2^2 - 10\sqrt{2}x_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{30}}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \dfrac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{30}}{4} \end{cases} .$$

Quindi le soluzioni del sistema (b) sono

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{5\sqrt{2} - \sqrt{30}}{4}, \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{30}}{4}\right) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) = \left(-\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{30}}{4}, \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{30}}{4}\right)$$

7. Ricordiamo che la superficie laterale di un cono è uguale al prodotto del raggio della base per l'apotema per π. Nel nostro caso diventa $x\sqrt{x^2 + y^2}\pi$. Quindi la superficie totale è $x\sqrt{x^2 + y^2}\pi + x^2\pi$. Il volume del cono $(\pi x^2 y)/3$. La superficie della sfera di raggio R è $4\pi R^2$. Il volume della sfera di raggio 1 è $4\pi/3$. Perciò i dati dell'esercizio affermano che x, y devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2}\pi + x^2\pi = 4\pi R^2 \\ (\pi x^2 y)/3 = 4\pi/3 \end{cases}$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 = 4R^2 \\ x^2 y = 4 \end{cases} . \tag{2.26}$$

Nel corso dello svolgimento di questo esercizio useremo varie volte il fatto che x, y e R sono quantità necessariamente positive; infatti è immediato verificare che $xyR \neq 0$ e quindi trattandosi di lunghezze devono essere tutti positivi.
Il sistema (2.26) è equivalente a

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} = 4R^2 - x^2 \\ x^2 y = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2(x^2 + y^2) = 16R^4 - 8R^2x^2 + x^4 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + x^2y^2 = 16R^4 - 8R^2x^2 + x^4 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2y^2 - 16R^4 + 8R^2x^2 = 0 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2y^2 - 16R^4 + 8R^2x^2 = 0 \\ x^2 = \dfrac{4}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4}{y}y^2 - 16R^4 + 8R^2\dfrac{4}{y} = 0 \\ x^2 = \dfrac{4}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4y^2 - 4R^4y + 8R^2 = 0 \\ x^2 = \dfrac{4}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2R^4 \pm \sqrt{4R^8 - 8R^2} \\ x^2 = \dfrac{4}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2R^4 \pm 2R\sqrt{R^6-2} \\ x^2 = \dfrac{4}{2R^4 \pm 2R\sqrt{R^6-2}} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2R^4 \pm 2R\sqrt{R^6-2} \\ x = \dfrac{2}{\sqrt{2R^4 \pm 2R\sqrt{R^6-2}}} \end{cases}$$

Più precisamente le soluzioni sono

$$(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2R^4 + 2R\sqrt{R^6-2}}}, 2R^4 + 2R\sqrt{R^6-2} \right)$$
$$(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2R^4 - 2R\sqrt{R^6-2}}}, 2R^4 - 2R\sqrt{R^6-2} \right).$$

Chiaramente tali soluzioni hanno senso se e solo se $R^6 - 2 \geq 0$. Questo equivale a chiedere che $R^3 \geq \sqrt{2}$ e quindi $R \geq \sqrt[6]{2}$. Concludiamo facendo notare che $2R^4 - 2R\sqrt{R^6-2} > 0$. Infatti vale

$$\sqrt{R^6-2} < \sqrt{R^6} = R^3.$$

8. Osserviamo che γ è la circonferenza di centro O e raggio R. Sia $P(a,b)$. Si vede immediatamente che $|\overline{PS}|^2 = b^2$. Invece $\overline{PT}$ è un cateto del triangolo rettangolo OPT. Infatti ogni tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio, della circonferenza stessa, passante per il punto di tangenza. Da questa osservazione deduciamo immediatamente che

$$|\overline{PT}|^2 = |\overline{OP}|^2 - |\overline{OT}| = a^2 + b^2 - R^2.$$

Perciò l'equazione del luogo cercato è

$$3a^2 + 3b^2 - 3R^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{R^2} + \frac{2b^2}{3R^2} = 1$$

che è l'equazione dell'ellisse di centro O ed assi $2R$ (lungo l'asse x) e $2R\sqrt{3/2}$ (lungo l'asse y). Graficamente la situazione è riprodotta nella Figura 2.48

9. Sia H il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo α con il lato $\overline{CB}$. Graficamente la situazione è descritta nella Figura 2.49

Per definizione di tangente abbiamo

$$|\overline{CH}| = b \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Calcoliamo facilmente gli angoli

$$H\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$$
$$A\hat{H}B = \pi - B\hat{A}H - H\hat{B}A = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Ora applicando il teorema dei seni al triangolo ABH otteniamo

$$\frac{c}{\sin A\hat{H}B} = \frac{|\overline{HB}|}{\sin H\hat{A}B} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{|\overline{HB}|}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad |\overline{HB}| = c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

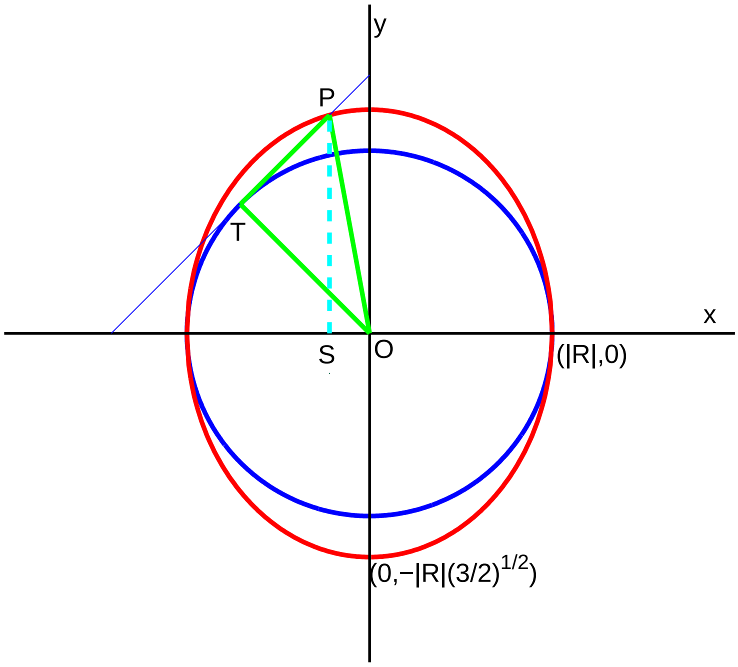


Figura 2.48: Es. 8 del 1/9/05

Infine abbiamo

$$a = |\overline{CH}| + |\overline{HB}| = b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (b + c) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

10. Risolveremo l'esercizio in un modo un po' macchinoso ma che permette di lavorare solo con equazioni di primo grado. Visto che dobbiamo lavorare con punti che si trovano su una circonferenza, sembrerebbe impossibile non usare equazioni di secondo grado. Adotteremo la notazione definita nella Figura 2.50. Si deduce facilmente che la circonferenza descritta nel testo ha centro nel punto $C(1, 1)$ e quindi la sua equazione è

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Considero la retta r passante per A e C; chiaramente il segmento $\overline{DE}$ è un diametro del cerchio. Presa una qualsiasi retta ortogonale ad r, se interseca la circonferenza, lo fa in due punti il cui punto medio si trova sul diametro $\overline{DE}$. Inoltre è facile dimostrare che un qualsiasi punto interno del cerchio, tranne C, è punto medio rispetto a una e una sola coppia di punti appartenenti a γ (provare a dimostrare questi due fatti per esercizio). Perciò la retta s passante per P e Q deve essere ortogonale a r e passare per A. Conoscendo le coordinate sia di A che di C possiamo scrivere il coefficiente angolare della retta r

$$m_r = \frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{2}{3}.$$

Perciò la retta s sarà del tipo $y = -\frac{3}{2}x + q$. Ora basta imporre la condizione $A \in s$ per ottenere q:

$$q = y_A + \frac{3}{2}x_A = \frac{4}{3} + \frac{9}{4} = \frac{43}{12}.$$

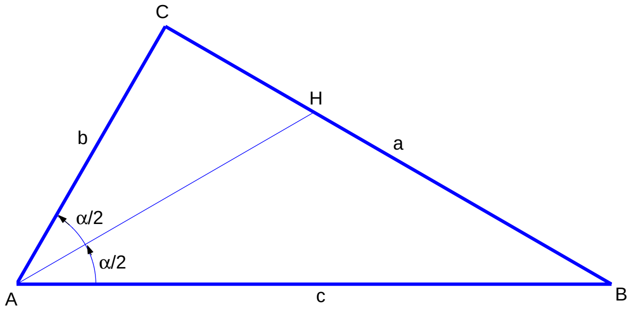


Figura 2.49: Es. 9 del 1/9/05

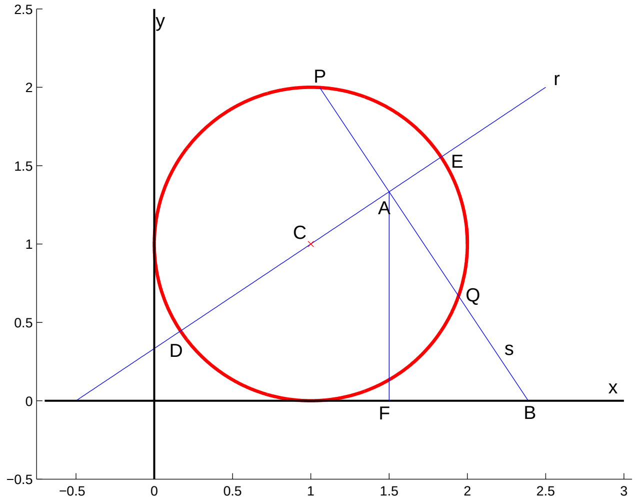


Figura 2.50: Es. 10 del 1/9/05

Ora siamo in grado di dedurre immediatamente le coordinate di B come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{43}{12} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}x + \frac{43}{12} \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$y = 0\,,\ x = \frac{43}{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{18} \quad \text{cioè} \quad B = \left(\frac{43}{18}, 0\right).$$

Useremo il secondo teorema di Euclide che afferma che in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Essendo $\overline{DE}$ un diametro, segue che il triangolo DQE è rettangolo e quindi l'altezza $\overline{AQ}$ è media proporzionale tra $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$. La lunghezza di questi due segmenti è facilmente esprimibile in termini di $|\overline{AC}|$, cioè $|\overline{AD}| = 1 + |\overline{AC}|$ e $|\overline{AE}| = 1 - |\overline{AC}|$. Conoscendo le coordinate sia di A che di C possiamo calcolare

$$|\overline{AC}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9+4}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

Ora possiamo applicare il secondo teorema di Euclide

$$|\overline{AQ}|^2 = |\overline{AE}| \cdot |\overline{AD}|(1 - |\overline{AC}|)(1 + |\overline{AC}|) = 1 - |\overline{AC}|^2 = 1 - \frac{13}{36} = \frac{23}{36}.$$

Il punto F è la proiezione di A sull'asse delle x e quindi F ha coordinate $(3/2, 0)$. Perciò si ha

$$|\overline{FB}| = x_B - x_F = \frac{43}{18} - \frac{3}{2} = \frac{43 - 27}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9},$$

da cui si deduce che

$$|\overline{AB}| = \sqrt{|\overline{AF}|^2 + |\overline{FB}|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{81}} = \sqrt{\frac{144 + 64}{81}} = \sqrt{\frac{208}{81}} = \frac{4}{9}\sqrt{13}.$$

Infine

$$|\overline{BQ}| \cdot |\overline{BP}| = (|\overline{AB}| - |\overline{AQ}|)(|\overline{AB}| + |\overline{AQ}|) = |\overline{AB}|^2 - |\overline{AQ}|^2 = \frac{208}{81} - \frac{23}{36} = \frac{5625}{81 \cdot 36} = \frac{75^2}{54^2}.$$

Quindi il quadrato deve avere lato uguale a $75/54$.

2.8 Prova scritta del 14/10/05

1. Risolviamo l'esercizio riscrivendo ogni monomio come potenza razionale di a. Useremo varie volte le basilari regole sulle potenze tra cui il fatto che $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ e $a^{-m} = 1/a^m$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23} = \left(\sqrt{a^{\frac{1}{15}}}\right)^{23} = \left(a^{\frac{1}{30}}\right)^{23} = a^{\frac{23}{30}} = a^{\frac{92}{120}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}},$$

$$\frac{\sqrt[8]{a^7} \cdot \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} = \frac{a^{\frac{7}{8}} \cdot a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{7}{8}+\frac{5}{4}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{8}} = a^{\frac{75}{120}},$$

$$\frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{\frac{5}{4}}}} = \frac{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{a^{\frac{5}{4}}}} = \frac{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{a^{\frac{5}{4}}}} = a^{1+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}} = a^{\frac{9}{8}} = a^{\frac{135}{120}}.$$

Ora, sapendo che se $a > 1$ allora $a^r < a^s$ per ogni $r < s \in \mathbb{R}$, deduciamo facilmente che

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} < \frac{\sqrt[8]{a^7} \cdot \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} < \left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23} < \frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}}.$$

2. La disequazione

$$4|x^2 - x| \geq 1 \tag{2.27}$$

è equivalente a

$$(a)\begin{cases} 4(x^2 - x) \geq 1 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad (b)\begin{cases} 4(-x^2 + x) \geq 1 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema (a) è equivalente a

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}.$$

Gli zeri del polinomio $4x^2 - 4x - 1$ sono $x = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$, mentre gli zeri del polinomio $x^2 - x$ sono $x = 0$ e $x = 1$. Ora facendo i soliti ragionamenti già visti più volte con disequazioni di secondo grado, deduciamo il diagramma rappresentato nella Figura 2.51

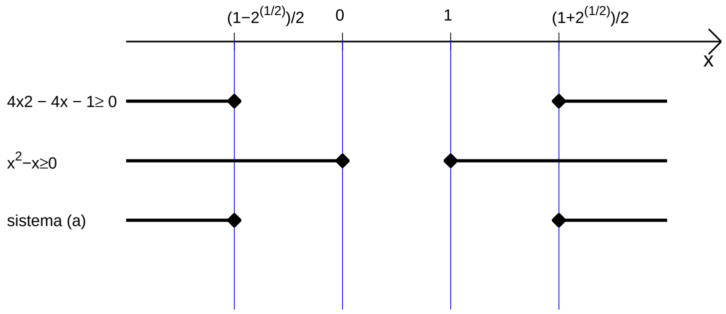


Figura 2.51: Es. 2 del 14/10/05

Quindi le soluzioni del sistema (a) sono tutte e sole le

$$x \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[).$$

Invece il sistema (b) è equivalente a

$$\begin{cases} -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(2x-1)^2 \geq 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione ha soluzione solo in $x = 1/2$. Visto che soddisfa anche la seconda disequazione, allora è l'unica soluzione del sistema (b).

Infine possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni della disequazione (2.27) è

$$\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.52

3. Ricordiamo che $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ e $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$. Perciò vale

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)} - \dfrac{2ab\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}}{a\cos(8\pi) + b\sin\left(\frac{7}{2}\right)} &= \frac{\dfrac{(a^2+b^2)(-\operatorname{tg}\alpha)}{-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{2ab(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}}{a-b} \\
&= \frac{a^2+b^2-2ab}{a-b} \\
&= \frac{(a-b)^2}{a-b} \\
&= a-b
\end{aligned}$$

N.B. Le condizioni del testo $a \neq b$ e $\alpha \neq k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$ servono a non far annullare tutti i denominatori delle frazioni che compaiono in questo esercizio.

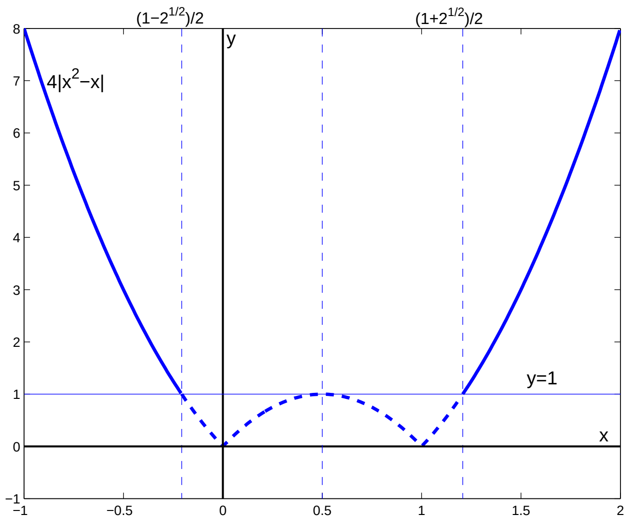


Figura 2.52: Es. 2 del 14/10/05

4. Chiaramente si deve avere $P(-1) = -1 + 1 - a + b = 0$ da cui segue che $a = b$. Quindi il polinomio $P(x)$ diventa

$$x^3 + x^2 + ax + a = x^2(x + 1) + a(x + 1) = (x + 1)(x^2 + a).$$

Perciò chiedere che $x = -1$ sia radice doppia del polinomio $P(x)$ è equivalente a chiedere che $(-1)^2 + a = 0$, ovvero $a = b = -1$. Con questi valori di a e b si ha

$$P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1).$$

5. Razionalizzando il denominatore della frazione otteniamo

$$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{(3 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}{(4 + 2\sqrt{3})((4 - 2\sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 12}{16 - 12} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora, nell'equazione trigonometrica, sostituiamo $\sin^2 x$ con $1 - \cos^2 x$ così otteniamo che

$$\begin{aligned}(1 + \cos x)^2 = (7 + 4\sqrt{3})\sin^2 x \quad &\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)^2 - (7 + 4\sqrt{3})(1 - \cos^2 x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)^2 - (7 + 4\sqrt{3})(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)[(1 + \cos x) - (7 + 4\sqrt{3})(1 - \cos x)] = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)[\cos x(8 + 4\sqrt{3}) - (6 + 4\sqrt{3})] = 0\end{aligned}$$

Perciò le soluzioni dell'equazione sono le x tali che

$$\cos x = -1 \quad \text{o} \quad \cos x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi in $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono

$$x = \pi \ , \quad x = \frac{\pi}{6} \ , \quad x = \frac{11\pi}{6}.$$

6. Usiamo il solito metodo che abbiamo sempre usato per equazioni lineari nel coseno e seno. Dividendo tutto per $2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2.28}$$

Essendo $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, la (2.28) diventa

$$\sin(\pi/6)\cos x + \cos(\pi/6)\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora è sufficiente usare la formula di addizione del seno per ottenere che la disequazione è equivalente a

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui segue che, in generale su tutto $\mathbb{R}$, le soluzioni sono tutte e sole le x tali che

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6} + x \leq \frac{7}{3}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

cioè

$$\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \leq +x \leq \frac{13}{6}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Per cercare le soluzioni in $[0, 2\pi]$ consideriamo gli intervalli definiti dalla precedente catena di disequazioni con $k = -1$ e $k = 0$, così otteniamo

$$[0, 2\pi] \cap \left(\left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{13}{6}\pi\right]\right) = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\pi, 2\pi\right].$$

7. Graficamente la situazione è riprodotta nella Figura 2.53

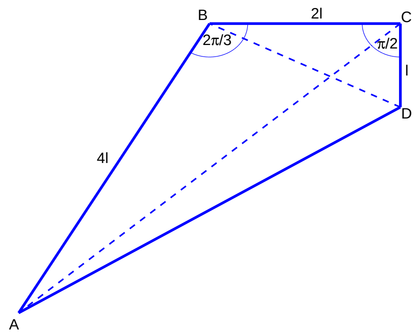


Figura 2.53: Es. 7 del 14/10/05

La misura $|\overline{AC}|$ si calcola immediatamente applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC ottenendo che

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{BC}|\cos(A\hat{B}C) = 16l^2 + 4l^2 - 2\cdot 4l\cdot 2l\cos\frac{2}{3}\pi = 20l^2 - 16l^2\left(-\frac{1}{2}\right) = 28l^2$$

da cui deduciamo che $|\overline{AC}| = 2l\sqrt{7}$.
La misura $|\overline{BD}|$ la calcoliamo semplicemente con il teorema di Pitagora

$$|\overline{BD}| = \sqrt{|\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2} = \sqrt{4l^2 + l^2} = l\sqrt{5}.$$

Invece, usando la formula di addizione del coseno e la definizione di seno e coseno applicata al triangolo rettangolo BCD, otteniamo

$$\cos D\hat{B}A = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - D\hat{B}C\right) = \cos\frac{2}{3}\pi\cos D\hat{B}C + \sin\frac{2}{3}\pi\sin D\hat{B}C =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BD}|} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{BD}|} = -\frac{1}{2}\frac{2l}{l\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{l\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$

da cui deduciamo

$$|\overline{DA}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BD}|^2 - 2|\overline{AB}|\cdot|\overline{BD}|\cos D\hat{B}A} = \sqrt{16l^2 + 5l^2 - 2\cdot 4l\cdot\sqrt{5}l\cdot\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}} =$$
$$= \sqrt{21l^2 - 4l^2(-2+\sqrt{3})} = \sqrt{21l^2 + 8l^2 - 4\sqrt{3}l^2} = l\sqrt{29 - 4\sqrt{3}}.$$

8. L'equazione della circonferenza γ può scritta nel seguente modo

$$0 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4$$

da cui capiamo che si tratta della circonferenza di centro $D(1,2)$ e raggio $r = 2$. Usiamo la notazione descritta nella Figura 2.54.

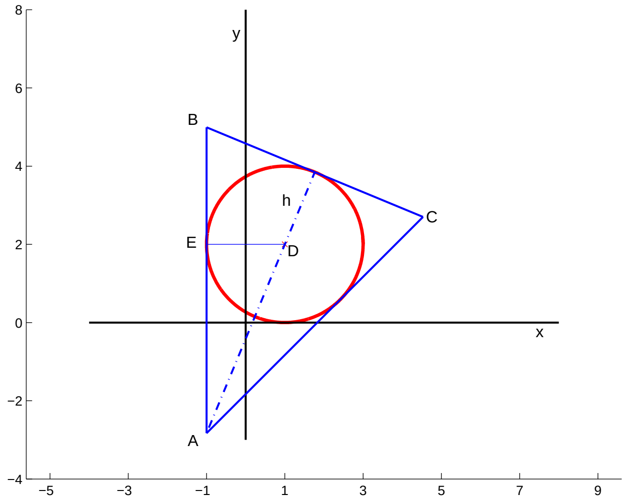


Figura 2.54: Es. 8 del 14/10/05

Dalla formula di bisezione del seno deduciamo che

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

da cui, essendo $\sin E\hat{A}D = \sin\frac{\pi}{8}$, deduciamo

$$|\overline{AD}| = \frac{|\overline{ED}|}{\sin E\hat{A}D} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Ora, essendo $|\overline{ED}| = r$ ed il triangolo ADE rettangolo, calcoliamo facilmente

$$|\overline{AE}| = \sqrt{|\overline{AD}|^2 - |\overline{ED}|^2} = \sqrt{\frac{16}{2-\sqrt{2}} - 4} = \sqrt{\frac{18-8+4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} == \sqrt{\frac{4(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{4(2+\sqrt{2})^2}{4-2}} =$$
$$= \sqrt{2(2+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+2$$

Ora è immediato verificare che A ha coordinate $(-1, -2\sqrt{2})$ e $h = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

9. I quadrati cercati sono due e hanno in comune il lato $\overline{P_0Q_0}$. Useremo la notazione fissata nella Figura 2.55

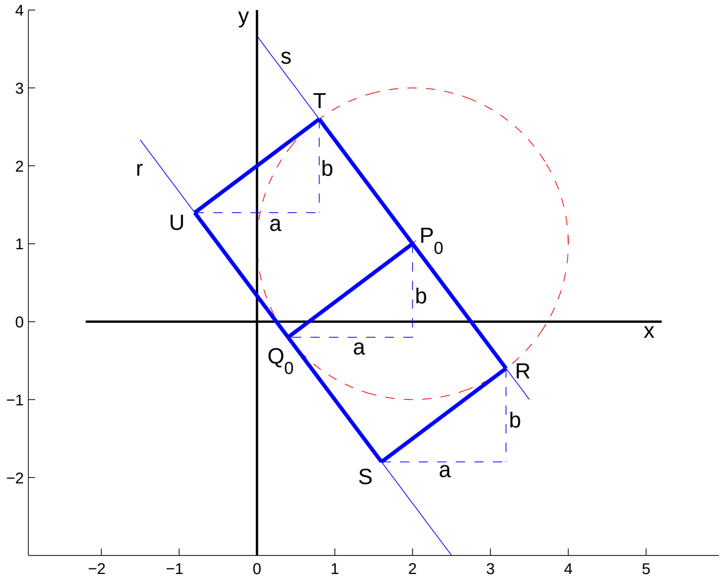


Figura 2.55: Es. 9 del 14/10/05

Il lato $\overline{P_0Q_0}$ giace sulla retta passante per $P_0(2, 1)$ e perpendicolare a r (e quindi anche ad s). Tale retta, per la condizione di perpendicolarità tra rette, deve avere equazione del tipo $y = \frac{3}{4}x + q$ dove q soddisfa

$$q = y_A - \frac{3}{4}x_A = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A questo punto è immediato verificare che

$$Q_0 = \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)x = \frac{5}{6} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} \frac{25}{12}x = \frac{5}{6} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = -\frac{8}{15} + \frac{1}{3} = \frac{-8+5}{15} = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Quindi Q_0 ha coordinate $(2/5, -1/5)$ da cui deduciamo che il lato l dei quadrati è

$$l = \sqrt{(x_{P_0} - x_{Q_0})^2 + (y_{P_0} - y_{Q_0})^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+36}{25}} = 2$$

Ora possiamo procedere in più modi. Uno è quello di vedere i punti T ed R come punti di intersezione della retta s con la circonferenza di centro P_0 e raggio $l = 2$. Essa ha equazione $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ e quindi i punti T ed R avranno come coordinate le coppie (x, y) che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases}.$$

Per cui abbiamo

$$T\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right) \quad \text{e} \quad R\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Infatti vale la seguente serie di equivalenze

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} - 1\right)^2 = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}\right)^2 = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 (x-2)^2 = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \left(1 + \frac{16}{9}\right) = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \left(\frac{25}{9}\right) = 4 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = \frac{36}{25} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \text{o} \begin{cases} x - 2 = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{16}{5} \\ y = -\dfrac{4}{3}\dfrac{16}{5} + \dfrac{11}{3} = \dfrac{-64+55}{15} = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 2 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{5} \\ y = -\dfrac{4}{3}\dfrac{4}{5} + \dfrac{11}{3} = \dfrac{-16+55}{15} = \dfrac{13}{5} \end{cases}.$$

Per cui abbiamo

$$T\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right) \quad \text{e} \quad R\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Ora, per calcolare le coordinate dei punti U e S, abbiamo bisogno delle quantità a e b (vedere la figura); infatti, i tre triangoli rettangoli con ipotenusa i lati $\overline{UT}$, $\overline{Q_0P_0}$ e $\overline{SR}$ sono per ovvie ragioni uguali. Abbiamo

$$a = x_{P_0} - x_{Q_0} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \quad \text{e} \quad b = y_{P_0} - y_{Q_0} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

Perciò

$$U: \ (x_T - a, y_T - b) = \left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5}, \frac{13}{5} - \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

e

$$S: \ (x_R - a, y_R - b) = \left(\frac{16}{5} - \frac{8}{5}, -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}\right).$$

Un altro modo di risolvere la parte finale dell'esercizio, senza fare uso delle quantità a e b, è quello di trovare le rette passante per T e ortogonale alla retta r con cui ha intersezione nel punto U. In modo simile si può ottenere il punto S. Provare per esercizio a seguire questo suggerimento di risoluzione alternativa.

10. La curva è la parabola riportata nella Figura 2.56

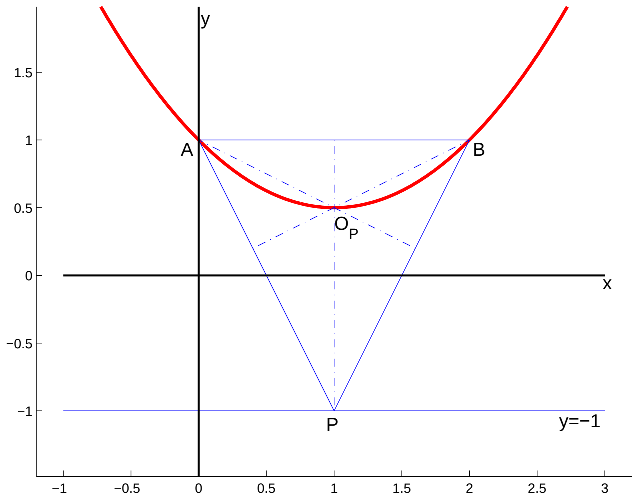


Figura 2.56: Es. 10 del 14/10/05

Sia $P(x_P, -1)$ un punto fissato come da ipotesi. Per costruzione, l'altezza relativa al lato $\overline{AB}$ giace sulla retta di equazione $x = x_P$. Per trovare l'ortocentro O_P è sufficiente trovare la retta su cui giace un'altra altezza del triangolo ABP e poi trovarne l'intersezione con la retta $x = x_P$. Nei prossimi ragionamenti escludiamo il caso $P(2, -1)$ per cui l'ortocentro cercato è chiaro che sia il punto B. La retta passante per B e P ha coefficiente angolare

$$m = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{1+1}{2-x_P} = \frac{2}{2-x_P}$$

perciò ogni retta ortogonale a BP ha equazione tipo

$$y = -\frac{1}{m}x + q = \frac{x_P - 2}{2}x + q. \tag{2.29}$$

Ora calcoliamo q in modo tale che la retta (2.29) passi per A

$$q = y_A - \frac{2}{x_P - 2}x_A = 1.$$

Quindi l'ortocentro ha come coordinate la soluzione (x, y) del seguente sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x_P - 2}{2}x + 1 \\ x = x_P \end{cases}$$

da cui si deduce facilmente che l'ortocentro O_P ha coordinate $\left(x_P, \dfrac{x_P - 2}{2}x_P + 1\right)$ (vale anche per il caso $x_P = 2$). Perciò l'ortocentro descrive la parabola di equazione

$$y = \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

2.9 Prova scritta del 13/3/06

1. Ricordiamo che

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{11}{2}\pi\right) = -1 \qquad \cos(6\pi) = 1$$

da cui otteniamo la seguente catena di identità

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{(a^3 - b^3)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} + \dfrac{3ab(a-b)\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{a^2 + b^2\cos(6\pi) + 2ab\sin\left(\frac{11}{2}\right)} &= \frac{\dfrac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{3ab(a-b)(-\cos\alpha)}{\cos\alpha}}{a^2 + b^2 - 2ab} \\
&= \frac{a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2}{(a-b)^2} \\
&= \frac{(a-b)^3}{(a-b)^2} \\
&= a - b
\end{aligned}$$

N.B. Le condizioni $a \neq b$ e $\alpha \neq k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$, del testo, servono a non far annullare tutti i denominatori delle frazioni che compaiono in questo esercizio.

2. Applicando le formule di prostaferesi e di duplicazone per il coseno otteniamo

$$\sin 3x - \sin x - (2\cos^2 x - 1) = 2\sin x\cos 2x - \cos 2x = (2\sin x - 1)\cos 2x,$$

quindi l'equazione ha per soluzioni tutte e sole le x tali che

$$\begin{array}{lclcl} 2\sin x - 1 = 0 & \text{o} & \cos 2x = 0 & & \text{equivalente a} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} & \text{o} & 2x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z} & & \text{equivalente a} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi & \text{o} & x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi & \text{o} & x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

cioè

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \mid \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. Se denotiamo con a e b le radici del polinomio $P(x)$ abbiamo

$$P(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

da cui, per il principio di identità tra polinomi, deduciamo $2\lambda - 1 = -(a+b)$ e $3 - 5\lambda = ab$. Perciò cerchiamo i valori di λ tali che

$$1 - 2\lambda = 3 - 5\lambda \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

4. Essendo $f(x) = (3-2x)(3+2x)$ si ha che il polinomio f si annulla in $x = \pm 2/3$. Inoltre il polinomio $g(x)$ si annulla in $x = 1/2$. Perciò è facile dedurre che abbiamo la situazione dei segni descritta nella Figura 2.57

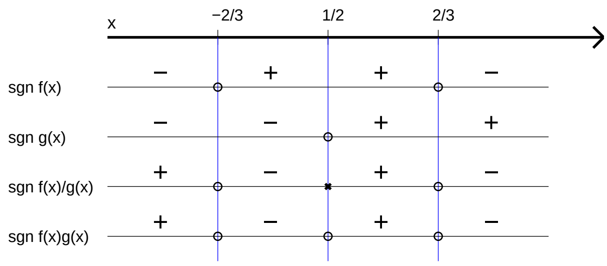


Figura 2.57: Es. 4 del 13/3/06

da cui deduciamo che la disequazione $f(x)/g(x) \le 0$ è soddisfatta in $[-2/3, 1/2[\cup [2/3, +\infty[$, mentre la disequazione $f(x)g(x) \ge 0$ è soddisfatta in $]-\infty, -2/3] \cup [1/2, 2/3]$. Infine dalla tabella delle soluzioni delle disequazioni $f(x) < 0$ e $g(x) \ge 0$ deduciamo che il sistema $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$ è soddisfatto in $]2/3, +\infty[$ come risulta dal diagramma degli intervalli rappresentato nella Figura 2.58.

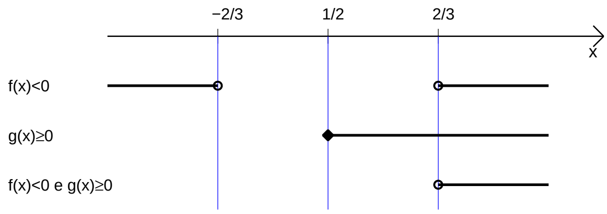


Figura 2.58: Es. 4 del 13/3/06

5. Vale

$$f(x) = \left(\frac{\frac{2x}{x^3-3}+1}{\frac{x^3-3}{2x}+1} + 1 \right) : (x^2+x+3) = \left(\frac{\frac{2x+x^3-3}{x^3-3}}{\frac{x^3-3+2x}{2x}} + 1 \right) : (x^2+x+3) =$$
$$= \left(\frac{2x}{x^3-3} + 1 \right) : (x^2+x+3) = \frac{2x+x^3-3}{x^3-3} \cdot \frac{1}{x^2+x+3} =$$
$$= \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x^3-3} \cdot \frac{1}{x^2+x+3} = \frac{x-1}{x^3-3}.$$

6. Dovendo risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2-1} > x+2 \tag{2.30}$$

bisogna porre la condizione $x^2 - 1 \geq 0$ che equivale a chiedere che $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= D$. Se $x + 2 < 0$, ovvero $x < -2$, la disequazione è banalmente verificata. Quindi dobbiamo solo studiare il caso $x \geq 2$ e $x \in D$. In tale situazione, elevando al quadrato entrambi i membri della disequazione del testo, otteniamo che (2.30) è equivalente a $x^2 - 1 > x^2 + 4x + 4$ che a sua volta è equivalente a $x < -5/4$. Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$D \cap \left\{ \left(\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[\cap]-2, +\infty[\right) \cup]-\infty, -2] \right\} = D \cap \left(\left]-2, -\frac{5}{4}\right[\cup]-\infty, -2] \right) = D \cap \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[$$

che è uguale a $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[$.

7. Innanzitutto notiamo che essendo a il lato opposto ad α, non essendo a il lato maggiore, allora $\alpha < \pi/2$[15]. Dalla prima relazione del testo otteniamo che $a = 7 - b$ e andando a sostituire a nella seconda relazione otteniamo

$$\frac{1}{7-b} + \frac{1}{b} = \frac{7}{12}$$

questa ultima identità , essendo b diverso da 0 e da 7, è equivalente a $12b + 12(7 - b) = 7b(7 - b)$ cioè

$$7b^2 - 49b + 12 \cdot 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 7b + 12 = 0$$

applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado otteniamo

[15]Infatti se α fosse maggiore di $\pi/2$ è facile verififcare che a sarebbe più lungo di tutti gli altri lati.

$$b = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - \cdot 12 \cdot 7^2}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \left[\begin{array}{l} 4 \\ \\ 3 \end{array} \right. ,$$

dovendo essere $b > a$, si ha che $b = 4$ e $a = 3$.
Sia $\overline{CH}$ l'altezza del triangolo ABC relativa alla base $\overline{AB}$. Vedere la Figura 2.59

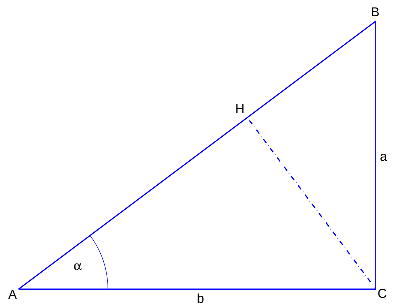


Figura 2.59: Es. 7 del 13/3/06

La figura è di questo tipo perché $\overline{AB}$ è il lato maggiore. Per la definizione di seno si ha

$$|\overline{CH}| = b \sin\alpha = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

da cui segue che

$$c = |\overline{AB}| = |\overline{AH}| + |\overline{HB}| = \sqrt{b^2 - |\overline{CH}|^2} + \sqrt{a^2 - |\overline{CH}|^2} =$$
$$= \sqrt{16 - \frac{144}{25}} - \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{256}{25}} + \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 5.$$

Da $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = c^2$ deduciamo che il triangolo ABC è rettangolo con cateti a e b[16].

8. Come al solito, questi problemi di geometria si possono risolvere in molti modi diversi. Qui presentiamo una risoluzione che, grazie all'uso del teorema di Talete, comporta il solo fare calcoli molto semplici. Usiamo la notazione fissata nella Figura 2.60

Vale

$$0 = x^2 + y^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4 = (x+2)^2 + y^2 - 4$$

che definisce la circonferenza di raggio $R = 2$ e centro in $O_2(-2, 0)$. Inoltre abbiamo

$$0 = x^2 + y^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = (x-1)^2 + y^2 - 1$$

che definisce la circonferenza di raggio $r = 1$ e centro in $O_1(1, 0)$. Osserviamo che per il teorema di Talete i triangoli AO_1P_1 e AO_2P_2 sono simili (in particolare sono rettangoli con un angolo non retto in comune), e quindi vale $R : r = |\overline{O_2A}| : |\overline{O_1A}|$, dove $|\overline{O_2A}| = R + 2r + a$ e $|\overline{O_1A}| = r + a$. Perciò vale

$$\frac{R}{r} = \frac{R + 2r + a}{r + a}$$

e quindi sostituendo i valori di R e di r otteniamo

[16] Ricordarsi che un triangolo è univocamente identificato dalla lunghezza dei suoi tre lati.

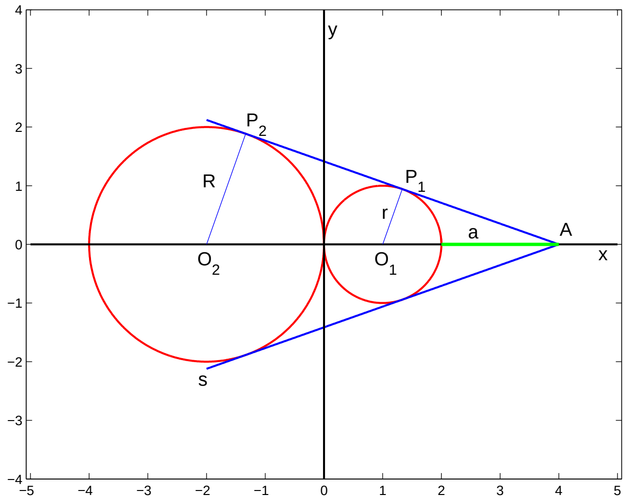


Figura 2.60: Es. 8 del 13/3/06

$$2 = \frac{4+a}{1+a}$$

moltiplicando tutto per $1 + a$ segue che $2 + 2a = 4 + a$, quindi abbiamo $a = 2$ e $A(4, 0)$. Essendo il triangolo AO_1P_1 rettangolo, deduciamo

$$|\overline{AP_1}| = \sqrt{|\overline{AO}|^2 - r^2} = \sqrt{(a+r)^2 - r^2} = \sqrt{(2+1)^2 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

da cui segue immediatamente che

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{|AP_1|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ora siamo in grado di scrivere l'equazione della retta r nella forma

$$y = \operatorname{tg}(\pi - \alpha)x + q = -\operatorname{tg}\alpha x + q = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + q,$$

quindi deduciamo q imponendo che la retta r passi per A

$$q = y_A + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_A = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Dunque la retta l ha equazione

$$l: \ y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Infine la retta s, essendo simmetrica a r rispetto all'asse delle x, ha equazione

$$s: \ y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Chiaramente c'è una terza retta tangente ad entrambe le due circonferenze ed è l'asse delle y.

9. Graficamente la situazione è rappresentata dalla Figura 2.61.

Il punto P' appartiene alla retta s perpendicolare alla retta r passante per P. Il coefficiente angolare della retta r è -2 e quindi s avrà equazione del tipo $y = x/2 + q$ dove

$$q = y_P - \frac{x_P}{2} = 3 - \frac{2}{2} = 2$$

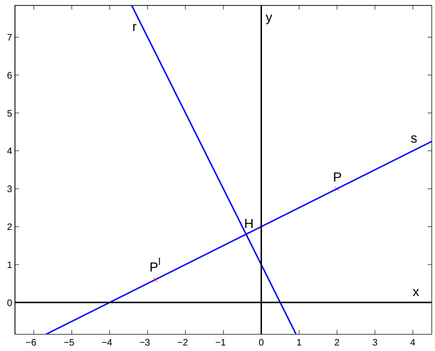


Figura 2.61: Es. 9 del 13/3/06

perciò la retta s ha equazione $y = x/2+2$. Se H è il punto di intersezione tra r ed s, le sue coordinate le determiniamo risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ y = \dfrac{x}{2}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x+1 \\ -2x+1 = \dfrac{x}{2}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x+1 \\ -4x+2 = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ -5x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\cdot\dfrac{2}{5}+1 \\ x = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{9}{5} \\ x = -\dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

Infine il punto P' è tale che il punto $H(-2/5, 9/5)$ è punto medio del segmento $\overline{PP'}$, quindi

$$x_P + x_{P'} = 2\cdot x_H \qquad x_{P'} = 2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - 2 = -\frac{142}{5}$$

$$y_P + y_{P'} = 2\cdot y_H \qquad y_{P'} = 2\cdot\left(\frac{9}{5}\right) - 3 = \frac{3}{5}$$

ovvero $P'\,(-14/5, 3/5)$.

10. Cominciamo con il risolvere la parte (a). Per scrivere l'equazione del fascio di rette passante per il punto P basta determinare due rette passanti per P e poi sommare tra loro multipli delle equazioni che definiscono tali rette. Le due rette definite da $y-2$ e $x-1$ contengono il punto P e quindi l'equazione del fascio cercato è

$$\lambda(y-2) + \mu(x-1) = 0 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ora risolviamo la parte (b). Osserviamo che possiamo escludere dal fascio la retta $x-1$. Infatti tale retta interseca in un solo punto la parabola $y = x^2$ e quindi non definisce alcun punto medio. Perciò il fascio può essere scritto

$$r_t:\ y - 2 + tx - t = 0 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Per ogni valore reale di t, la retta r_t interseca la parabola $y = x^2$ nei punti le cui coordinate (x, y) si ottengono risolvendo il sistema che ha come equazioni quella della retta e quella della parabola.

Vale la seguente sequenza di equivalenze

$$\begin{cases} y = 2 - tx + t \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - tx + t \\ 2 - tx + t = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - tx + t \\ x^2 + tx - 2 - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{t^2}{2} \mp \frac{t}{2}\sqrt{\Delta} + 2 + t \\ x = \frac{-t \pm \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}.$$

Quindi i punti di intersezione sono

$$\left(\frac{-t + \sqrt{\Delta}}{2}, +\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\sqrt{\Delta} + 2 + t\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{-t - \sqrt{\Delta}}{2}, +\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{\Delta} + 2 + t\right)$$

da cui deduciamo che hanno punto medio P_M di coordinate

$$x_M = \frac{-t + \sqrt{\Delta} - t - \sqrt{\Delta}}{4} = -\frac{t}{2}$$

$$y_M = \frac{1}{2}\left(+\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\sqrt{\Delta} + 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{\Delta} + 2 + t\right) = \frac{t^2}{2} + 2 + t$$

cioè

$$P_M\left(-\frac{t}{2}, +\frac{t^2}{2} + 2 + t\right).$$

Ora osserviamo che

$$2x_M^2 - 2x_M + 2 = 2\frac{t^2}{4} - 2\left(-\frac{t}{2}\right) + 2 = \frac{t^2}{2} + t + 2 = y_M$$

quindi il luogo geometrico dei punti medi è la parabola di equazione

$$y = 2x^2 - 2x + 2. \tag{2.31}$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.62

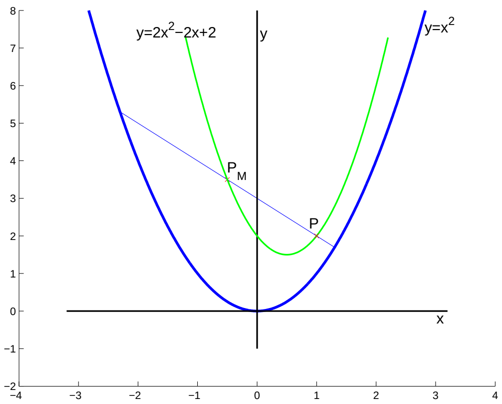


Figura 2.62: Es. 10 del 13/3/06

In realtà abbiamo solo mostrato che i punti P_M appartengono alla parabola (2.31). Il viceversa, cioè che ogni punto della parabola (2.31) è del tipo P_M, è facile da provare. Infatti dato un punto $P(x, y)$ della parabola (2.31), esiste un unico valore di $t \in \mathbb{R}$ tale che $x = -t/2$. Dall'equazione (2.31) deduciamo che $y = \frac{t^2}{2} + 2 + t$ e quindi P è un punto medio del tipo P_M.

2.10 Prova scritta del 21/04/06

1. Risolviamo l'esercizio riscrivendo ogni monomio come potenza di 2. Useremo varie volte le basilari regole sulle potenze tra cui il fatto che $\sqrt[n]{2^m} = 2^{\frac{m}{n}}$ e $2^{-m} = 1/2^m$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Essendo

$$\sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20}(2^3)^7}} = \sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20} \cdot 2^{21}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{41}{8}}} = 2^{\frac{41}{24}}$$

$$2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{7}{4}} = 2^{\frac{42}{24}}$$

$$\frac{4\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{2+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{12+1-3}{6}} = 2^{\frac{10}{6}} = 2^{\frac{40}{24}}$$

vale

$$\frac{4\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}} < \sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20}(2^3)^7}} < 2\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

2. Ricordiamo che

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1).$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha(2\cos^3\alpha - \cos\alpha).$$

Tutte queste uguaglianze valgono per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ e si deducono facilmente dalle formule di addizione del seno e del coseno. Da tali identità deduciamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \sin 4x + \sin 2x - \sin(\pi + 3x) = 4\sin x(2\cos^3 x - \cos x) + 2\sin x\cos x + \sin x(4\cos^2 x - 1) = \\ &= \sin x(8\cos^3 x - 4\cos x + 2\cos x + 4\cos^2 x - 1) = \sin x(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = \\ &= \sin x[4\cos^2 x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1)] = \sin x(2\cos x + 1)(4\cos^2 x - 1) = \\ &= \sin x(2\cos x + 1)^2(2\cos x - 1) \end{aligned}$$

Oppure avremmo potuto usare la formula di prostaferesi per la somma di seni

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

da cui deduciamo che

$$\sin 4x + \sin 2x = 2\sin\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} = 2\sin 3x\cos x$$

e quindi l'equazione del testo diventa

$$0 = \sin 4x + \sin 2x - \sin(\pi + 3x) = 2\sin 3x\cos x + \sin 3x$$

e completando i calcoli giungiamo all'equazione ottenuta prima.

Nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$

$$\begin{array}{ccccc} & & \sin x = 0 & \Leftrightarrow & x = -\pi \ \ o \ \ x = 0 \ \ o \ \ x = \pi \ \ o \ \ x = 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 & \Leftrightarrow & \cos x = -\frac{1}{2} & \Leftrightarrow & x = -\frac{2}{3}\pi \ \ o \ \ x = \frac{2}{3}\pi \ \ o \ \ x = \frac{4}{3}\pi \\ 2\cos x - 1 = 0 & \Leftrightarrow & \cos x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & x = -\frac{\pi}{3} \ \ o \ \ x = \frac{\pi}{3} \ \ o \ \ x = \frac{5}{3}\pi. \end{array}$$

Chiaramente nell'ultima colonna ci sono tutte le soluzioni dell'equazione.

3. Facciamo la divisione euclidea del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x) = x^2 + x + 3$. In questo modo otteniamo due polinomi $q(x)$ e $r(x)$, con grado di $r(x)$ minore strettamente di 2, tali che $P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$. Cercheremo infine i valori di a e b tali che il resto $r(x)$ sia il polinomio nullo.
Prendiamo il monomio di grado più alto del dividendo $P(x)$ e lo dividiamo per il monomio di grado più alto del divisore $Q(x)$, ottenendo x^2. Questo sarà il primo monomio del polinomio quoziente $q(x)$ e lo mettiamo nella seconda riga della seconda colonna della seguente tabella

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
 & & & & & x^2
\end{array}$$

dove nella prima riga della prima colonna c'è il polinomio $P(x)$. Moltiplichiamo x^2 per $Q(x)$ e il risultato lo mettiamo nella seconda riga della prima colonna

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
x^4 & x^3 & 3x^2 & 0 & 0 & x^2
\end{array}$$

Adesso calcoliamo la differenza tra i polinomi della prima colonna, il risultato lo mettiamo nella terza riga della prima colonna della tabella

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
x^4 & x^3 & 3x^2 & 0 & 0 & x^2 \\ \cline{1-5}
0 & (b-1)x^3 & +(a+b-3)x^2 & +5x & \text{-b} &
\end{array}$$

Ricominciamo con la procedura appena eseguita ma con questo ultimo polinomio $(b-1)x^3 + (a+b-3)x^2 + 5x - b$ al posto del polinomio $P(x)$. Quindi dividiamo $(b-1)x^3$ per x^2 ottenendo $(b-1)x$. Questo ultimo monomio sarà il secondo del polinomio $q(x)$ e quindi lo aggiungiamo nella seconda riga della seconda colonna della tabella. Moltiplichiamo $(b-1)x$ per $x^2 + x + 3$ e il risultato lo mettiamo nella prima colonna

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
x^4 & x^3 & 3x^2 & 0 & 0 & x^2+(b-1)x \\ \cline{1-5}
0 & (b-1)x^3 & +(a+b-3)x^2 & +5x & \text{-b} & \\
 & (b-1)x^3 & (b-1)x^2 & 3(b-1)x & 0 &
\end{array}$$

adesso calcoliamo il polinomio che si ottiene sottraendo l'ultimo polinomio al penultimo della prima colonna e lo aggiungiamo di seguito

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
x^4 & x^3 & 3x^2 & 0 & 0 & x^2+(b-1)x \\ \cline{1-5}
0 & (b-1)x^3 & +(a+b-3)x^2 & +5x & \text{-b} & \\
 & (b-1)x^3 & (b-1)x^2 & 3(b-1)x & 0 & \\ \cline{1-5}
 & 0 & (a-2)x^2 & +(8-3b)x & \text{-b} &
\end{array}$$

Ripetiamo di nuovo la procedura. Quindi dividiamo $(a-2)x^2+(8-3b)x-b$ per x^2 ottenendo $a-2$. Questo ultimo monomio sarà il terzo del polinomio $q(x)$ e quindi lo aggiungiamo nella seconda riga della seconda colonna della tabella. Moltiplichiamo $a-2$ per x^2+x+3 e il risultato lo mettiamo nella prima colonna

x^4	bx^3	$+(a+b)x^2$	$+5x$	$-b$	x^2+x+3
x^4	x^3	$3x^2$	0	0	$x^2+(b-1)x+(a-2)$
0	$(b-1)x^3$	$+(a+b-3)x^2$	$+5x$	-b	
	$(b-1)x^3$	$(b-1)x^2$	$3(b-1)x$	0	
		$(a-2)x^2$	$+(8-3b)x$	-b	
		$(a-2)x^2$	$(a-2)x$	$+3a-62$	

Finalmente otteniamo $r(x)=(10-3b-a)x-b-3a+6$ sottraendo l'ultimo polinomio al penultimo della prima colonna dell'ultima tabella. Il polinomio $r(x)$ è identicamente nullo se e solo se a e b soddisfano il seguente sistema

$$\begin{cases} 10-3b-a=0 \\ 6-b-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10-3b \\ 6-b-30+9b=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}.$$

Con questi valori di a e b otteniamo che

$$P(x)=x^4+3x^3+4x^2+5x-3=(x^2+2x-1)(x^2+x+3).$$

4. La disequazione $\sqrt{3x^2-8x+9}+2x>3$ è equivalente a

$$\sqrt{3x^2-8x+9}>3-2x. \tag{2.32}$$

Il dominio della disequazione si determina trovando le $x\in\mathbb{R}$ tali che $3x^2-8x+9\geq 0$. Osservando che il determinante di $3x^2-8x+9$ è $\Delta=64-108<0$, deduciamo che il dominio della disequazione (2.32) è tutto $\mathbb{R}$.
Se $-2x+3\leq 0$, cioè $x\geq 3/2$, la disuguaglianza (2.32) è banalmente verificata.
Se $x<3/2$, la (2.32), avendo entrambi i membri positivi, è equivalente a

$$3x^2-8x+9>(-2x+3)^2=4x^2-12x+9$$

che a sua volta equivale a $x^2+20x<0$. Questa ultima disequazione ha soluzioni in

$$]-\infty,-20[\cup]0,+\infty[$$

quindi, nella situazione $x<3/2$, l'insieme delle soluzioni della disequazione (2.32) è l'intervallo $]0,3/2[$.
Concludiamo deducendo che in generale su tutto $\mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni della disequazione (2.32) è l'intervallo

$$]0,3/2[\cup[3/2,+\infty[)=]0,+\infty[$$

5. Riscriviamo il sistema del testo nel seguente modo

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-8x+9}+2x>3 \\ (x-k)^2-1\leq 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

Come risulta dal precedente esercizio, la prima equazione del sistema (2.33) ha soluzioni in $]0,+\infty[$. Invece la seconda disequazione ha soluzioni con $x \in \mathbb{R}$ tale che $-1 \le x-k \le 1$; cioè $-1+k \le x \le 1+k$. Il sistema (2.33) non ammette soluzioni per tutti i k tali che $]0,+\infty[\cap[-1+k, 1+k] = \emptyset$, questo avviene se e solo se $k \le -1$.

6. Riscriviamo i due membri dell'equazione del testo in modo da stabilire più facilmente il dominio di definizione ed eventuali semplificazioni. Si vede immediatamente che x deve essere non nullo.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}} = \qquad \text{(da cui segue che } x \neq -1)$$

$$= 1+\cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x+1}} = 1+\frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}. \qquad \text{(da cui segue che } x \neq -1/2)$$

$$\frac{x^3}{2x^2-x-1} = \frac{x^3}{(2x+1)(x-1)} \qquad \text{(da cui segue che } x \neq 1).$$

Deduciamo che il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq \pm 1,\ x \neq -1/2\}$. e l'equazione del testo diventa

$$\frac{3x+2}{2x+1} = \frac{x^3}{(2x+1)(x-1)}.$$

Moltiplicando tutto per $(2x+1)(x-1)$, in D, questa ultima equazione diventa equivalente a $(3x+2)(x-1) = x^3$. Svolgendo i calcoli otteniamo l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0. \tag{2.34}$$

Essendo $2^3 - 3\cdot 2^2 + 2 + 2 = 0$, per il teorema di Ruffini sappiamo che il polinomio $x-2$ divide il polinomio $x^3 - 3x^2 + x + 2$. Con facili calcoli

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 1 & 2 \\ & & & & \\ 2 & & 2 & -2 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & // \end{array}$$

deduciamo che l'equazione (2.34) è equivalente a $(x-2)(x^2-x-1) = 0$. Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado otteniamo

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x = 2.$$

7. Applicando la formula di bisezione del seno deduciamo che il denominatore della frazione della disequazione trigonometrica del testo diventa

$$\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}\frac{1-\cos x}{2} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}\cos x - 1.$$

Perciò ricaviamo la disequazione

$$\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} > 0.$$

Adesso risolviamo prima la disequazione in $[0, 2\pi[$ e poi estendiamo i risultati a tutto $\mathbb{R}$ usando la periodicità 2π delle funzioni seno e coseno.
Avendo che

$$2\sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \text{ o } x = \frac{5}{6}\pi$$
$$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ o } x = \frac{7}{4}\pi$$

ricaviamo la tabella dei segni rappresentata nella Figura 2.63

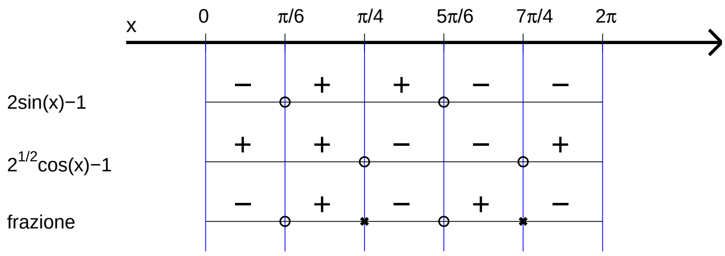


Figura 2.63: Es. 7 del 21/4/06

Quindi su tutto $\mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni è rappresentato dall'unione di tutti gli intervalli del tipo

$$\left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[\quad \text{e} \quad \left]\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

8. Chiaramente nel testo è sottinteso che $\hat{B}$ è l'angolo interno del quadrilatero nel vertice B, $\hat{C}$ l'angolo interno nel vertice C e così via. Nella Figura 2.64 abbiamo rappresentato la situazione grafica descritta nel testo dell'esercizio.

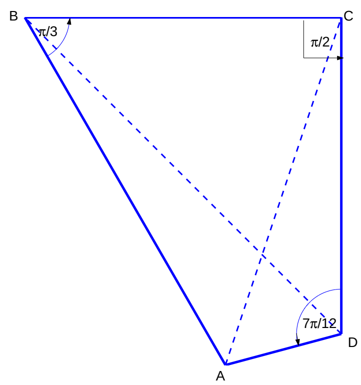


Figura 2.64: Es. 8 del 21/4/06

Facendo uso del teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo BCD, otteniamo

$$|\overline{BD}| = \sqrt{|\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2} = \sqrt{2l^2 + 2l^2} = 2l.$$

La somma degli angoli interni di un quadrilatero è 2π, quindi abbiamo che

$$\hat{A} = 2\pi - \hat{B} - \hat{C} - \hat{D} = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{7}{12}\pi = \frac{24-4-6-7}{12}\pi = \frac{7}{12}\pi.$$

Il triangolo BCD è rettangolo e isoscele, quindi deduciamo che $D\hat{B}C = \pi/4$, perciò $A\hat{B}D = \hat{B} - D\hat{B}C = \pi/6 - \pi/4 = \pi/12$. Inoltre è facile vedere che $B\hat{D}A = 7\pi/12 - \pi/4 = \pi/3$. Ora dalla formula di sottrazione del seno otteniamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

e da quella di addizione ricaviamo

$$\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Inoltre, usando il teorema dei seni applicato al triangolo ABD e i valori dei due angoli appena determinati, otteniamo che

$$|\overline{AB}| = \sin B\hat{D}A\frac{|\overline{BD}|}{\sin\hat{A}} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{2l}{\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2l}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2l\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$$

$$|\overline{AD}| = \sin A\hat{B}D\frac{|\overline{BD}|}{\sin\hat{A}} = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\frac{2l}{\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)} = 2l\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Razionalizzando abbiamo

$$|\overline{AB}| = \frac{2l\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2l\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = l\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$$

$$|\overline{AD}| = 2l\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2l\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = 2l\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

da cui deduciamo che

$$\begin{aligned}2p &= |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{AD}| = l\left[\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right] \\ &= l\left[3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{2}\right] = l\left(8 - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{6}\right).\end{aligned}$$

Infine applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC deduciamo che

$$\begin{aligned}|\overline{AC}| &= \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{BC}|\cdot\cos\hat{B}} \\ &= \sqrt{6\cdot l^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\cdot l^2 - l^2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}} \\ &= l\sqrt{6\left(4-2\sqrt{3}\right) + 2 - \sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}} \\ &= l\sqrt{24 - 12\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)} \\ &= l\sqrt{26 - 12\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}} \\ &= l\sqrt{20 - 10\sqrt{3}} \\ &= l\sqrt{10}\sqrt{2-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Usando la formula dei radicali doppi (vedere es. 5 del 20/06/05) otteniamo

$$\begin{aligned}|\overline{AC}| &= l\sqrt{10}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\ &= l\sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}\right)\\ &= l\sqrt{10}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\\ &= l\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

9. Usiamo la notazione fissata dalla Figura 2.65

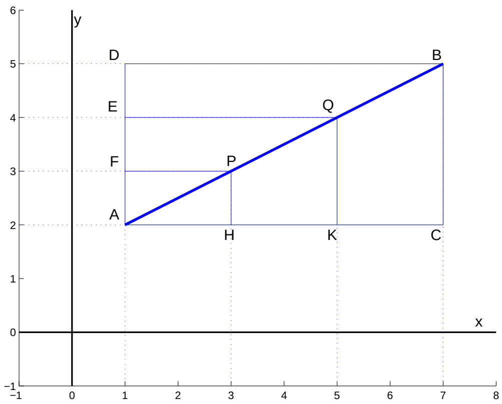


Figura 2.65: Es. 9 del 21/4/06

Per il teorema di Talete, dal fatto che $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}| = |\overline{QB}|$ otteniamo che

$$|\overline{AH}| = |\overline{HK}| = |\overline{KC}| = \frac{|\overline{AC}|}{3} = \frac{x_C - x_A}{3} = \frac{x_B - x_A}{3} = \frac{7-1}{3} = 2.$$

Quindi

$$x_P = x_H = x_A + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x_Q = x_K = x_H + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Allo stesso modo otteniamo

$$|\overline{AF}| = |\overline{FE}| = |\overline{ED}| = \frac{|\overline{AD}|}{3} = \frac{|\overline{AB}|}{3} = \frac{y_B - y_A}{3} = \frac{5-2}{3} = 1.$$

Quindi

$$y_P = y_F = y_A + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$y_Q = y_E = x_F + 1 = 3 + 1 = 4,$$

cioè $P = (3, 3)$ e $Q = (5, 4)$.

10. Il triangolo ABP è rettangolo se e solo se $|BP|$ e $|AP|$ sono positivi e

$$|BP|^2 + |AP|^2 = |AB|^2. \tag{2.35}$$

Sia $P(x, x^2)$ un generico punto della parabola $y = x^2$. Per ogni tale punto abbiamo

$$|\overline{BP}|^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{25}{4}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + x^4 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{625}{16} = x^4 - \frac{23}{2}x^2 + 5x + \frac{725}{16};$$
$$|\overline{AP}|^2 = (x+2)^2 + \left(x^2 + 1\right)^2 = x^2 + 4x + 4 + x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 + 3x^2 + 4x + 5;$$
$$|\overline{AB}|^2 = \left(-2 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{841}{16} = \frac{845}{16}.$$

Perciò la (2.35) diventa

$$x^4 - \frac{23}{2}x^2 + 5x + \frac{725}{16} + x^4 + 3x^2 + 4x + 5 = \frac{845}{16}$$

e con semplici calcoli si semplifica in $32x^4 - 136x^2 + 144x - 40 = 0$. Si vede immediatamente che 1 è una radice del polinomio $32x^4 - 136x^2 + 144x - 40$ e quindi per il teorema di Ruffini è divisibile da $x - 1$. Più precisamente si ha

	+32	0	-136	+144	-40
1		32	32	-104	40
	32	32	-104	40	//

da cui si deduce che $32x^4 - 136x^2 + 144x - 40 = (x-1)(32x^3 + 32x^2 - 104x + 40)$. Di nuovo si vede facilmente che 1 è radice del polinomio $32x^3 + 32x^2 - 104x + 40$ e quindi da

	+32	32	-104	40
1		32	64	-40
	32	64	-40	//

deduciamo che $32x^4 - 136x^2 + 144x - 40 = (x-1)^2(32x^2 + 64x - 40) = 8(x-1)^2(4x^2 + 8x - 5)$. Ora basta applicare la formula ridotta per le soluzioni delle equazioni di secondo grado per ottenere che il polinomio $4x^2 + 8x - 5$ si annula in

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4} = \left[\begin{array}{l} +\frac{1}{2} \\ \\ -\frac{5}{2} \end{array}\right. .$$

Infine, deduciamo che i punti cercati hanno ascissa $x = 1$ o $x = 1/2$. l'ascissa $x = -5/2$ non va bene perché fornisce il punto $P = B$ che non definisce alcun triangolo. Perciò i punti cercati sono $P_1(1, 1)$ e $P_2\,(1/2, 1/4)$ e i triangoli sono quelli rappresentati nella Figura 2.66.

Un altro modo per risolvere il problema è il seguente: si ponga $P(k, k^2)$ e si determinino i coefficienti angolari m_{AP} e m_{BP} delle due rette r_{AP} e r_{BP} (la prima passante per i punti A e P e la seconda per i punti B e P). L'equazione $m_{AP} \cdot m_{BP} = -1$ fornirà i valori di k tali che il triangolo ABP sia rettangolo in P. Lasciamo al lettore il compito di svolgere i calcoli.

2.11 Prova scritta del 19/6/06

1. Ricordiamo che vale $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui è definito il radicale) da cui deduciamo che

$$n = \sqrt[12]{\sqrt[3]{5} - 1} \cdot \left(5 \cdot \frac{2}{3} + \sqrt[3]{5} + 1\right)^{\frac{1}{12}} : \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1} = \sqrt[12]{\left(\sqrt[3]{5} - 1\right)\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{5} + 1\right)} : \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}}.$$

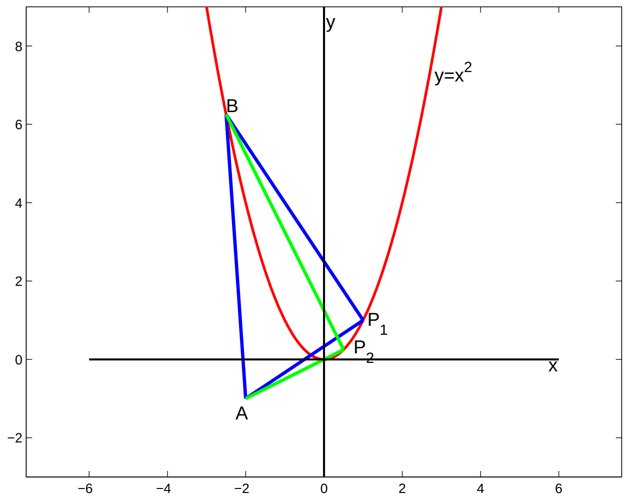


Figura 2.66: Es. 10 del 21/4/06

Ora, usando la formula per la differenza di due cubi e razionalizzando il denominatore del secondo radicale, otteniamo che

$$n = \sqrt[12]{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - (1)^3} : \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt[12]{4} : \sqrt[3]{2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2}} =$$
$$= \sqrt[6]{2} : \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} : \sqrt[6]{2} = 1$$

2. Essendo $\sin(\pi + x) = -\sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la disequazione da risolvere diventa

$$\begin{aligned} -\sin x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x + \cos x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - 1) - \cos x(2\cos x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2\cos x - 1)(\sin x - \cos x) = 0. \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni cercate sono tutte e sole le $x \in [-2\pi, \pi/2]$ tali che $\cos x = 1/2$ o $\sin x = \cos x$. Cioè

$$\begin{array}{lllll} x = -\frac{5}{3}\pi & ; \quad x = -\frac{\pi}{3} & ; \quad x = \frac{\pi}{3} & & (\text{caso } \cos x = 1/2) \\ x = -\frac{7}{4}\pi & ; \quad x = -\frac{3}{4}\pi & ; \quad x = \frac{\pi}{4} & & (\text{caso } \sin x = \cos x). \end{array}$$

3. Chiaramente deve essere $k \geq 0$. Osserviamo che $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ e $kx^2 - 2\sqrt{k}x + 1 = (\sqrt{k}x - 1)^2$ quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3)^2 \leq 0 \\ (\sqrt{k}x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} . \tag{2.36}$$

La prima disequazione ha soluzione solo con $x = -1$ o $x = 3$, mentre la seconda con $x = 1/\sqrt{k}$. Chiaramente questo ultimo valore di x è sempre positivo, quindi il sistema (2.36) ha soluzioni se e solo se $1/\sqrt{k} = 3$, cioè $k = 1/9$.

4. Supponiamo che il polinomio $P(x)$ abbia una radice doppia; denotiamo con a tale radice e con b la "terza"[17] radice ottenendo così che

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 4x^2 + 4x + 2k - 1 = (x-a)^2(x-b) = \\ &= (x^2 - 2ax + a^2)(x-b) = x^3 + (-2a-b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2 b. \end{aligned}$$

Quindi deve essere verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} -2a - b = -4 \\ 2ab + a^2 = 4 \\ -a^2 b = 2k - 1 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} b = 4 - 2a \\ 2a(4-2a) + a^2 = 4 \\ k = \dfrac{1 - a^2 b}{2} \end{cases}.$$

Con semplici calcoli otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b = 4 - 2a \\ 3a^2 - 8a + 4 = 0 \\ k = \dfrac{1 - a^2 b}{2} \end{cases} \tag{2.37}$$

e applicando la formula risolutiva ridotta per equazioni di secondo grado, otteniamo che la seconda equazione di questo ultimo sistema ha soluzioni in

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ \\ \dfrac{2}{3} \end{array} \right.$$

Perciò , con semplici calcoli, si verifica che il sistema (2.37) è equivalente a

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} b = \dfrac{8}{3} \\ a = \dfrac{2}{3} \\ k = -\dfrac{5}{54} \end{cases}$$

Quindi si ha con $k = 1/2$

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = (x-2)^2 x$$

e con $k = -5/54$

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - \frac{32}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{8}{3}\right).$$

5. Osserviamo che $x - 1 \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$ e

$$\begin{aligned} |x-1| - 2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x-1| \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 \geq 2 \;\text{ o }\; x - 1 < -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \;\text{ o }\; x < -1 \end{aligned}$$

[17] L'abbiamo chiamata terza perché la radice a è doppia.

Chiaramente la disequazione

$$||x-1|-2| \leq 2x+3 \tag{2.38}$$

non ha soluzioni in $x \in]-\infty, -3/2[$; infatti in tale intervallo $2x+3$ è negativo. Quindi, suddividiamo lo studio della disequazione nei seguenti quattro casi.
Caso $x \in [-3/2, -1]$. In questa situazione abbiamo $x-1 < 0$ e $|x-1|-2 = -x+1-2 = -x-1 \geq 0$, perciò la disequazione (2.38) diventa $-x-1 \leq 2x+3$, ovvero $x \geq -4/3$. Quindi, in questo caso, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $[-4/3, -1]$.
Caso $x \in]-1, 1[$. In questa situazione abbiamo $x-1 < 0$ e $|x-1|-2 = -x+1-2 = -x-1 < 0$, perciò la disequazione (2.38) diventa $x+1 \leq 2x+3$, ovvero $x \geq -2$. Quindi, in questo caso, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $]-1, 1[$.
Caso $x \in [1, 3[$. In questa situazione abbiamo $x-1 \geq 0$ e $|x-1|-2 = x-1-2 = x-3 < 0$, perciò la disequazione (2.38) diventa $-x+3 \leq 2x+3$, ovvero $x \geq 0$. Quindi, in questo caso, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $[1, 3[$.
Caso $x \in [3, +\infty[$. In questa situazione abbiamo $x-1 > 0$ e $|x-1|-2 = x-1-2 = x-3 \geq 0$, perciò la disequazione (2.38) diventa $x-3 \leq 2x+3$, ovvero $x \geq -6$. Quindi, in questo caso, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo $[3, +\infty[$.
Finalmente possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni è

$$[-4/3, -1] \cup]-1, 1[\cup [1, 3[\cup [3, +\infty[= [-4/3, +\infty[.$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.67.

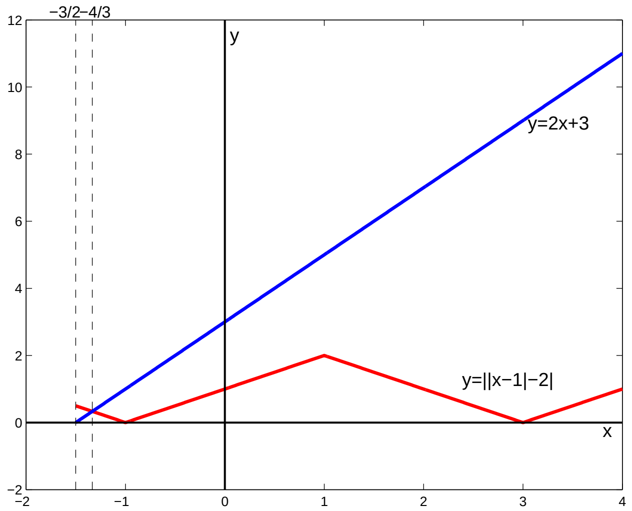


Figura 2.67: Es. 5 del 19/6/06

6. Riscriviamo i due membri dell'equazione del testo in modo da stabilire più facilmente il dominio di definizione ed eventuali semplificazioni. Si vede immediatamente che x deve essere non nullo.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = \quad \text{(da cui segue che } x \neq 1\text{)}$$

$$= \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} = \frac{x-1}{-1} = 1-x.$$

$$\frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3} = \frac{4x^2+7x-2}{(x-1)(2x+3)} \quad \text{(da cui segue che } x \neq -3/2\text{).}$$

Deduciamo che il dominio è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -\frac{3}{2}\right\}.$$

e l'equazione del testo diventa

$$1-x = \frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3}.$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa ultima equazione per $2x^2+x-3$ otteniamo

$$2x^2+x-3-2x^3-x^2+3x = 4x^2+7x-2$$

che diventa

$$2x^3+3x^2+3x+1 = 0.$$

Scriviamo il polinomio di terzo grado nel seguente modo

$$2x^3+3x^2+3x+1 = x^3+x^3+3x^2+3x+1 = x^3+(x+1)^3$$

e sfruttando la formula per la somma di due cubi $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, sostituendo x ad a e $x+1$ a b, giungiamo all'equazione

$$0 = (2x+1)[x^2-x(x+1)+(x+1)^2] = (2x+1)(x^2-x^2-x+x^2+2x+1) = (2x+1)(x^2+x+1).$$

Si verifica immediatamente che x^2+x+1 non ha radici reali.[18] Perciò l'unica soluzione è $x = -1/2$.

7. L'insieme di definizione della disequazione è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Infatti la tangente non è definita in $\pi/2+k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e il denominatore si annulla in $\pi/4+k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Usando la formula di prostaferesi sulla differenza di due coseni otteniamo

$$\begin{aligned}\cos 4x - \cos 2x + \sin 3x &= -2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} + \sin 3x \\ &= -2\sin 3x \sin x + \sin 3x \\ &= \sin 3x(-2\sin x + 1).\end{aligned}$$

Perciò la disequazione da risolvere diventa

$$\frac{\sin 3x(-2\sin x+1)}{\operatorname{tg} x - 1} \geq 0.$$

[18] Ha due radici nel campo dei numeri complessi che sono chiamate radici terze (primitive) dell'unità . Cercare di capire per esercizio il perché vengano chiamate così . L'essere primitive è una definizione puramente tecnica.

Prima la risolviamo nell'intervallo $[0, 2\pi[$ e poi estendiamo le soluzioni a tutto $\mathbb{R}$ sfruttando la periodicità delle funzioni trigonometriche.
Nell'intervallo $[0, 2\pi[$ vale

$$\begin{array}{llll}
\sin 3x = 0 & \Leftrightarrow \quad 3x = k\pi \ \text{ con } k \in \{0,1,2,3,4,5\} & \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3}k \ \text{ con } k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\
-2\sin x + 1 = 0 & \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} \ \text{ o } \ x = \frac{5}{6}\pi \\
\operatorname{tg} x - 1 = 0 & \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 & \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{4} \ \text{ o } \ x = \frac{5}{4}\pi.
\end{array}$$

Con un po' di pazienza è facile dedurre il diagramma dei segni rappresentato nella Figura 2.68.

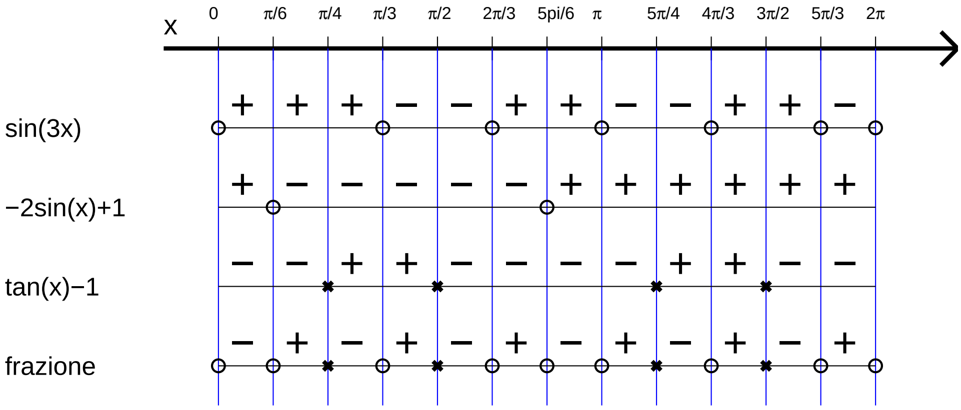


Figura 2.68: Es. 7 del 19/6/06

Da cui deduciamo che l'insieme delle soluzioni è costituito dall'unione di tutti i seguenti intervalli

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right],$$

$$\left[\pi + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right), \left[\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), \left[\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

8. Usiamo la notazione fissata dalla Figura 2.69

La retta r_1 passante per A e D ha coefficiente angolare

$$m_1 = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{2}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}} = \frac{2}{3}.$$

La retta r_2 passante per B e C ha coefficiente angolare

$$m_2 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2}{3}.$$

La retta r_3 passante per B e A ha coefficiente angolare

$$m_3 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

La retta r_4 passante per B e A ha coefficiente angolare

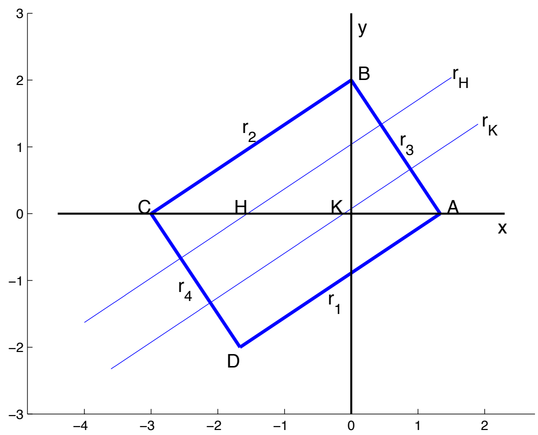


Figura 2.69: Es. 8 del 19/6/06

$$m_4 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{2}{-3 + \dfrac{5}{3}} = \frac{2}{-\dfrac{4}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Quindi vale che $m_1 = m_2 = -1/m_3 = -1/m_4$. Ricordiamo che se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare allora sono parallele; mentre se il coefficiente angolare di una è l'opposto dell'inverso dell'altra, allora sono perpendicolari. Perciò abbiamo che r_1 e r_2 sono parallele e perpendicolari a r_3 ed r_4. Siano H e K i due punti sull'asse delle x tali che $|\overline{CH}| = |\overline{HK}| = |\overline{KA}|$. Chiaramente le due rette cercate r_H e r_K, parallele ad $\overline{AD}$ che tagliano il rettangolo $ABCD$ in tre rettangoli uguali, devono rispettivamente passare per H e K. Da

$$|\overline{AC}| = x_A - x_C = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$$

deduciamo

$$x_K = x_A - |\overline{KA}| = x_A - \frac{|\overline{AC}|}{3} = \frac{4}{3} - \frac{13}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$x_H = x_K - |\overline{HK}| = x_K - \frac{|\overline{AC}|}{3} = -\frac{1}{9} - \frac{13}{9} = -\frac{14}{9}$$

e quindi $H = (-14/9, 0)$ e $K = (-1/9, 0)$. La retta r_K, essendo parallela a r_1, ha equazione del tipo $y = (2/3)x + q$ e dovendo passare per K abbiamo che $q = y_K - (2/3)x_K = -(2/3)(-1/9) = 2/27$. Perciò

$$r_K : \; y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}.$$

Anche la retta r_H, essendo anch'essa parallela a r_1, ha equazione $y = (2/3)x + q$ ma questa volta, dovendo passare per H, abbiamo che $q = y_H - (2/3)x_H = -(2/3)(-14/9) = 28/27$. Perciò

$$r_H : \; y = \frac{2}{3}x + \frac{28}{27}.$$

9. Osserviamo che la parabola di equazione $y = x^2$ è simmetrica rispetto alla retta $y = x$ alla parabola di equazione $x = y^2$. Infatti è facile dimostrare che ogni punto $P = (x_P, y_P)$ ha come simmetrico rispetto alla retta $y = x$ il punto $P' = (y_P, x_P)$ (provate a dimostrarlo come esercizio). È immediato verificare che ogni punto $Q = (a, a^2)$, della parabola $y = x^2$, ha come simmetrico il punto $Q' = (a^2, a)$ che appartiene alla parabola $x = y^2$. Inoltre, se una retta $s : y = mx + q$ è tangente alla parabola $y = x^2$, la sua simmetrica s' rispetto alla retta $y = x$, di equazione $x = my + q$, sarà tangente alla parabola $x = y^2$. Perciò una tangente in comune è una retta s che coincide con la sua simmetrica s' rispetto alla retta $y = x$. Scrivendo $s' : y = x/m - q/m$, deduciamo che condizione necessaria (ma non sufficiente) affincé s sia tangente in comune è che $m = 1/m$, ovvero $m = \pm 1$. Per questioni di simmetria, dovendo avere $s = s'$ tangente alle due parabole, escludiamo il caso $m = 1$. Infatti l'unico caso possibile con $m = 1$, valutando solo la condizione $s = s'$, è la retta $y = x$ che chiaramente non è tangente alle parabole. Perciò la retta s dovrà avere equazione del tipo $y = -x + q$. Cerchiamo i valori del parametro q per cui tale retta è tangente alla parabola $y = x^2$. I valori di q cercati sono quelli per cui il sistema

$$\begin{cases} y = -x + q \\ y = x^2 \end{cases} \tag{2.39}$$

ha un'unica soluzione con molteplicità due. Sostituendo x^2 a y nella prima equazione del sistema (2.39) otteniamo $x^2 + x - q = 0$. Questa ultima equazione ammette una sola radice se e solo se il discriminante Δ del polinomio $x^2 + x - q$ si annulla, ovvero

$$\Delta = 1 + 4q = 0$$

e cio accade con $q = -1/4$. Quindi la retta cercata è

$$s : \; y = -x - \frac{1}{4}.$$

Graficamente la situazione è rappresentata nella Figura 2.70

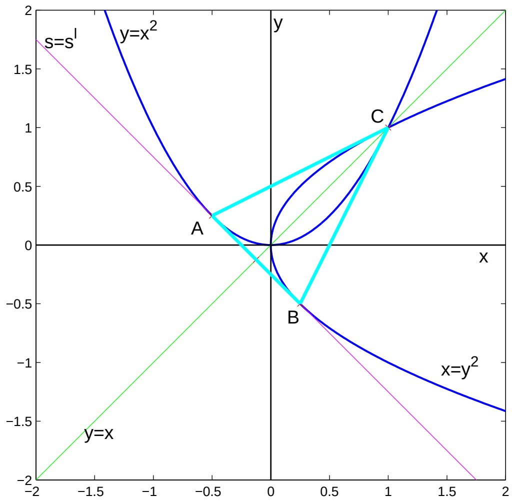


Figura 2.70: Es. 9 del 19/6/06

Descriviamo un altro modo, forse un po' più standard, per determinare l'equazione della retta s che non fa uso delle considerazioni di simmetria esposte sopra. Presentiamo solo i ragionamenti lasciando al lettore il compito di svolgere nel dettaglio i calcoli.
Imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x^2 \end{cases}$$

abbia solo una soluzione con molteplicità due otteniamo l'equazione $\Delta_1 = m^2 + 4q = 0$. Invece, imponendo che il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x = y^2 \end{cases}$$

abbia solo una soluzione con molteplicità due otteniamo l'equazione $\Delta_2 = 1 - 4mq = 0$. Perciò m e q devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 + 4q = 0 \\ \Delta_2 = 1 - 4mq = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo $m^3 + 1 = 0$ che in $\mathbb{R}$ ha come unica soluzione $m = -1$. Inoltre dal sitema deduciamo $q = -1/4$.

Ora continuamo la risoluzione del problema. Dal sistema (2.39) con $q = -1/4$ otteniamo le coordinate del punto A nel seguente modo: come prima otteniamo che $x^2 + x + 1/4 = 0$ cioè

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

ed essendo $B = A'$ il simmetrico del punto A rispetto alla retta $y = x$, otteniamo

$$B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Ora troviamo H come punto medio tra A e B

$$H = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right) = \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

L'altezza del triangolo ABC è

$$|\overline{HC}| = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{8}\right)^2} = $$
$$= \sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right)^2} = \frac{9}{8}\sqrt{2},$$

mentre la base del triangolo ABC è

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2} = $$
$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2},$$

quindi l'area del triangolo ABC è

$$\text{Area} = \frac{|\overline{AB}||\overline{HC}|}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{9}{8}\sqrt{2}\right) = \frac{27}{32}.$$

10. La situazione grafica è rappresentata dalla Figura 2.71.

Come al solito la rappresentazione grafica serve solo per fissare meglio le idee. Dimostreremo analiticamente ogni cosa richiesta. L'angolo $D\hat{C}A$ è uguale all'angolo $C\hat{A}B = \pi/4$, in quanto alterni

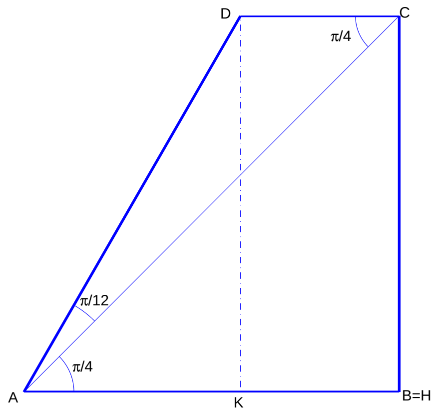


Figura 2.71: Es. 10 del 19/6/06

interni rispetto alle rette parallele contenenti i lati $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ tagliate dalla retta traversale contenente $\overline{AC}$. Perciò abbiamo che

$$A\hat{D}C = \pi - C\hat{A}D - D\hat{C}A = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{12-1-3}{12}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Nel corso dello svolgimento dell'Esercizio 5 del 21/4/06 abbiamo calcolato

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo ADC otteniamo

$$|\overline{AC}| = \sin(A\hat{D}C)\frac{|\overline{DC}|}{\sin C\hat{A}D} = \sin\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})l}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})l}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = 3\sqrt{2}l$$

$$|\overline{AD}| = \sin(D\hat{C}A)\frac{|\overline{DC}|}{\sin C\hat{A}D} = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})l}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})l}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = 2\sqrt{3}l.$$

Essendo

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D + B\hat{A}C = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

deduciamo che

$$|\overline{AK}| = |\overline{AD}|\cos B\hat{A}D = 2\sqrt{3}l\cos\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}l\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}l$$

$$|\overline{DK}| = |\overline{AD}|\sin B\hat{A}D = 2\sqrt{3}l\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3l.$$

Da $|\overline{AH}| = |\overline{AK}| + |\overline{DC}| = \sqrt{3}l + 3l - \sqrt{3}l = 3l$ deduciamo che $B = H$ e quindi $|CB| = |DK| = 3l$. Infine calcoliamo l'area del trapezio

$$\text{Area} = (|\overline{AB}| + |\overline{DC}|)\frac{|\overline{DK}|}{2} = (3l + 3l - \sqrt{3}l)\frac{3l}{2} = \frac{18-3\sqrt{3}}{2}l.$$

Parte II

Temi dal 01/09/06 al 22/05/08

Testi con soluzione breve

3 Testi e soluzione breve

3.1 Prova scritta del 01/09/06

1. Verificare che i due seguenti numeri sono razionali e reciproci:

$$p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2} - \frac{2\left(\sqrt{2}+3\right)}{9\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{6} - \sqrt{3}\,,$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2+2-4\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right).$$

Soluzione: $p = -\dfrac{44}{9}$, $q = -\dfrac{9}{44}$.

2. Data l'equazione di secondo grado

$$(\lambda+1)x^2 - \lambda x + 2 - \lambda = 0\,,$$

determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ammette radici reali. Se x_1 e x_2 sono le radici reali dell'equazione, determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si ha che

$$(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + 1 > 0\,.$$

Soluzione: Per $\lambda \in \left]-\infty, \dfrac{2-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\dfrac{2+2\sqrt{11}}{5}, +\infty\right[$; per gli stessi valori di λ.

3. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, della seguente disequazione trigonometrica

$$4\,\mathrm{tg}\,x - \frac{3}{\mathrm{tg}\,x} + 1 < 0\,.$$

Soluzione: $x \in \left]0, \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right[\cup \left]\pi, \pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{7}{4}\pi\right[$.

4. Scomporre in fattori il polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 80$ e usare la scomposizione per semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{2x^2 + 9x - 5}\,.$$

Soluzione: $x^3 - 3x^2 - 24x + 80 = (x-4)^2(x+5)$; $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{2x-1}$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{\frac{|x+1|+2x-1}{x-3}} > 1\,.$$

Soluzione: $x \in \,]3, +\infty[$.

6. Trovare le soluzioni della seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{\sqrt{x^2+8}-2} = x\,.$$

Soluzione: $x = 1$.

7. Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{4}{3}\,.$$

Soluzione: $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Nel piano cartesiano sono dati i punti $A(-1, 1)$ e $B(5, 3)$ e la retta r di equazione $x - y = 3$. Scrivere l'equazione del luogo descritto dal baricentro del triangolo ABP, con P punto che percorre la retta r.
Soluzione: $y = x - 1$.

9. Trovare le equazioni delle tangenti comuni alla parabola $x = -y^2$ e alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
Soluzione: $y = -\frac{\sqrt{6}}{12}x + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{6}}{12}x - \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x = 0.$

10. Un triangolo ABC è acutangolo e si sa che l'angolo $\hat{A}$ misura $\frac{\pi}{3}$ e i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sono lunghi rispettivamente $\sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{3}$. Trovare le misure degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e la lunghezza del lato $\overline{AC}$. (Si tenga conto che $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$).
Soluzione: $\hat{B} = \frac{\pi}{4}, \quad \hat{C} = \frac{5}{12}\pi, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$

3.2 Prova scritta del 13/10/06

1. Posto $a = 15$ e $b = \sqrt{213} + 2\sqrt[3]{1620 - 111\sqrt{213}}$, trovare quale delle seguenti relazioni è corretta:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b\,.$$

Soluzione: $a = b$.

2. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x-1}} - \frac{3x}{2x-4} + \frac{11}{6} > 0\,.$$

Soluzione: $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\;\cup\;]0,1[\;\cup\;]1,2[\;\cup\;]3,+\infty[$.

3. Trovare le soluzioni della seguente equazione:

$$\sqrt{(x^2-1)^3} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,.$$

Soluzione: $x \in \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$.

4. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, della seguente disequazione trigonometrica:

$$2\sin x \,\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, x} + \sin x \geq 2\cos x\,.$$

Soluzione: $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\;\cup\; \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right]$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2\,.$$

Soluzione: $x \in \left]-\infty, -4+2\sqrt{5}\right[$.

6. Sul segmento $\overline{AB}$, con $A(-2,3)$ e $B(1,4)$, determinare le coordinate di un punto P tale che $|\overline{AP}| = \frac{3}{5}\,|\overline{PB}|$.
Soluzione: $P\left(-\frac{7}{8}, \frac{27}{8}\right)$.

7. Il triangolo PQR è rettangolo in Q e ha i cateti di lunghezza $|\overline{PQ}| = 14$ e $|\overline{QR}| = 48$. Se M è il punto medio di $\overline{PR}$, determinare il coseno dell'angolo $M\hat{Q}P$.
Soluzione: $\frac{7}{25}$.

8. Nel piano cartesiano, per ogni $t \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, è dato il punto

$$Q(t)\left(t, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right)\,.$$

Dette $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ le proiezioni ortogonali di $Q(t)$ sugli assi, sia $P(t)$ la proiezione ortogonale dell'origine $O(0,0)$ sulla retta passante per $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$. Verificare che $P(t)$ appartiene a una circonferenza di cui si chiede l'equazione.
Soluzione: $x^2 + y^2 = 1$.

9. Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto $A(1,1)$ che, con gli assi coordinati x, y, individuano nel primo quadrante triangoli di area $\frac{9}{4}$. Verificato che tali rette hanno equazione

$$y = -2x + 3 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

determinare i punti della retta di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

che sono equidistanti dalle altre due rette.
Soluzione: $(2,2)$ e $(-2,4)$.

10. Calcolare la differenza tra l'area dell'esagono regolare circoscritto a una circonferenza di raggio r e l'area del triangolo equilatero inscritto nella medesima circonferenza.
Soluzione: $\frac{5}{4}\sqrt{3}r^2$.

3.3 Prova scritta del 05/12/06

1. Semplificare la rappresentazione del seguente numero intero:

$$n = \sqrt{\frac{1 + 2\sin\left(\frac{123}{4}\pi\right)}{\sqrt{2} - 1}} \cdot \left(9 - 6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{16}{3}\pi\right).$$

Soluzione: $n = 3$.

2. Qual è il minimo numero di quadrati di lato $l = 3\sqrt{2}\,a$ la cui unione contiene un segmento di lunghezza $31a$?
Soluzione: 6.

3. Risolvere la seguente equazione:

$$\sqrt{\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \sqrt{x}.$$

Soluzione: $x = 2$.

4. Dopo aver verificato che

$$\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{7} \pm 1\right),$$

si consideri un angolo convesso α tale che $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$. Determinare:

$$\sin\alpha, \quad \cos\left(\frac{1}{4}\alpha\right), \quad \sin\left(\frac{1}{4}\alpha\right), \quad \cos\left(\frac{5}{4}\alpha\right).$$

Soluzione: $\sin\alpha = \frac{3}{8}\sqrt{7}$, $\cos\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{7}+1)$, $\sin\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{7}-1)$, $\cos\left(\frac{5}{4}\alpha\right) = \frac{\sqrt{7}-11}{16}$.

5. Verificare che l'equazione $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ha una soluzione intera e risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \big||x|-1\big| \geq 2 \\ x(x^2-1) > x^2+2 \end{cases} .$$

Soluzione: Soluzione intera: $x = 2$. Soluzioni sistema: $x \in [3, +\infty[$.

6. Verificare che l'equazione $2t^3 + t^2 + t - 1 = 0$ ha una soluzione razionale e trovare, nell'intervallo $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$, le soluzioni della seguente disequazione trigonometrica:

$$\frac{2\sin^2 x + 3\sin x - 2}{2\cos^3 x + \cos x - \sin^2 x} \geq 0\,.$$

Soluzione: Soluzione razionale: $t = \frac{1}{2}$.

Soluzioni disequazione: $x \in \left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right[\;\cup\; \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi\right[\;\cup\; \left[\frac{13}{6}\pi, \frac{7}{3}\pi\right[$.

7. Nel piano cartesiano Oxy sono assegnate le circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0\,, \quad (x+1)^2 + y^2 = r^2\,.$$

Determinare r in modo che una tangente comune alle due circonferenze sia parallela alla retta di equazione $y - x = 0$.
Soluzione: $r_1 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$, $r_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$.

8. Il lato non obliquo $\overline{AD}$ e la base minore $\overline{DC}$ di un trapezio rettangolo $ABCD$ hanno la stessa lunghezza l. Inoltre, i punti M e H sono rispettivamente il punto d'incontro delle diagonali e la sua proiezione ortogonale sulla base maggiore $\overline{AB}$. Risolvere il triangolo DMC sapendo che $|\overline{MH}| = \frac{2}{3}\,l$.
Soluzione: $|\overline{DM}| = \frac{\sqrt{5}}{3}l$, $|\overline{MC}| = \frac{\sqrt{2}}{3}l$, $\cos(D\widehat{M}C) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin(C\widehat{D}M) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(D\widehat{C}M) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Nel piano sono dati i punti $A(1,1)$ e $B(-1,2)$. Dopo avere verificato che il luogo dei punti P tali che $|\overline{AP}|^2 = \frac{1}{2}|\overline{BP}|^2$ è la circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x-1 = 0$, determinare l'area dell'ottagono circoscritto alla circonferenza.
Soluzione: $a = 80(\sqrt{2}-1)$.

10. Nel piano cartesiano Oxy sono dati la parabola $y = x^2$ e il fascio di rette di equazione $y = mx+2-m$.

a) Verificare che per ogni $m \in \mathbb{R}$ le rette del fascio incontrano la parabola in due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

b) Se A e B sono i punti del quesito a), determinare i valori di $m \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\, x_1^2 x_2^2 - 2\,.$$

Per questi valori di m, determinare le coordinate di A e B.

Soluzione: $m = 0$, $A(-\sqrt{2}, 2)$, $B(\sqrt{2}, 2)$; $m = 6$, $A(3 + \sqrt{5}, 14 + 6\sqrt{5})$, $B(3 - \sqrt{5}, 14 - 6\sqrt{5})$.

3.4 Prova scritta del 19/03/07

1. Verificare che il numero

$$\alpha = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

è un intero positivo.
Soluzione: $\alpha = 4$.

2. Dati i polinomi a coefficienti reali

$$f(x) = x^3 + bx^2 + ax + b - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + (a+1)x^2 + 2bx + a\,,$$

determinare a e b in modo che

$$\text{M.C.D.}(f(x), g(x)) = x^2 + x + 1\,.$$

Soluzione: $a = b = 1$.

3. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\sqrt{x-1} + 1} \leq \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$

Soluzione: $x \in \{1\} \cup [2, +\infty[$.

4. Risolvere l'equazione

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - 1\,.$$

Soluzione: $x = 1$.

5. Risolvere l'equazione trigonometrica nell'intervallo $[0, \pi]$

$$\sin(x + \pi) + \sin 2x = \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right).$$

Soluzione: $x \in \left\{0, \frac{2}{9}\pi\right\}$.

6. Data l'equazione

$$2x^2 + (k+1)x - k = 0\,,$$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione ha radici reali x_1 e x_2 tali che

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Soluzione: $k = 1$.

7. Siano dati, nel piano cartesiano, i punti $A(-2,-5)$, $B(-5,-2)$ e $C(-2,-1)$. Determinare l'equazione dell'asse del segmento $\overline{AB}$ e il punto D tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio isoscele.
Soluzione: Asse: $y = x$; $D(-1,-2)$.

8. Determinare l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, che ha il vertice nel punto $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x - 3$.
Soluzione: $y = x^2 + x - 3$.

9. La base maggiore $\overline{AB}$ di un trapezio rettangolo $ABCD$ è quattro volte l'altezza e la base minore $\overline{CD}$ è lunga $4l$. Sapendo che il seno dell'angolo compreso tra la base maggiore e la diagonale minore è $\frac{1}{3}$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio.
Soluzione: $p = [4 + 5\sqrt{2} + \sqrt{50 - 32\sqrt{2}}]l\,;\ a = 2(2+\sqrt{2})l^2$.

10. Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano la cui distanza dal punto A di coordinate $(-1,0)$ è tre volte la distanza dalla retta di equazione $y = -x + 2$.
Soluzione: $7x^2 + 7y^2 + 18xy - 40x - 36y + 34 = 0$.

3.5 Prova scritta del 14/05/07

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la seguente funzione razionale:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 5x^2 - 36}\,.$$

Soluzione: Dominio: $x \in]-\infty, -3[\, \cup\,]-3, 3[\, \cup\,]3, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x+3}\,.$

2. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{\sqrt{x} - 1} \geq \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}\,.$$

Soluzione: $x = 1$.

3. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x+3}{x^2-1}\,.$$

Soluzione: $x = 2$.

4. Risolvere l'equazione nell'intervallo $\left]0, \frac{5}{2}\pi\right]$:

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{2-\sin x}=\frac{2}{\sqrt{2-\sin x}}\,.$$

Soluzione: $x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}$.

5. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$:

$$\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2=\frac{1+\cos 3x}{2}\,.$$

Soluzione: $x \in \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Risolvere la disequazione in $[0, 2\pi]$:

$$\frac{\sin x+\cos x-1}{2\sin^2 x+(4-\sqrt{2})\sin x-2\sqrt{2}}>0\,.$$

Soluzione: $x \in \left]\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi, 2\pi\right[$.

7. Un quadrato, che non ha punti in comune con gli assi coordinati, ha lato $l = 2\sqrt{2}$, un vertice nel punto $A\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e due lati paralleli alla retta di equazione $x + y + 2 = 0$. Determinare gli altri tre vertici.
Soluzione: $B\left(\frac{17}{4}, \frac{9}{4}\right)$, $C\left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}\right)$, $D\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

8. Sono dati i punti $A(-1, 2)$ e $B(3, 0)$ e la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 + 1$. Determinare il luogo $\mathcal{L}$ dei baricentri del triangolo che ha un vertice sulla parabola e gli altri vertici nei punti A e B. Determinare inoltre i punti di intersezione tra $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{L}$.
Soluzione: Luogo: $y = 3x^2 - 4x + \frac{7}{3}$; punti di intersezione: $\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}, \frac{7\pm 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Assegnati nel piano i punti $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(2, 4)$, determinare il centro, il raggio e l'equazione della circonferenza tangente al lato $\overline{AB}$ e ai prolungamenti dei lati $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$.
Soluzione: $(2, -6)$; 6; $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$.

10. Su una semicirconferenza che ha diametro $\overline{AB}$ di lunghezza d, si prenda un punto P e lo si congiunga con gli estremi A e B del diametro. Sul lato $\overline{AP}$ si costruisca, esternamente al triangolo APB, il quadrato $APQR$. Se x è la misura dell'angolo $B\hat{A}P$, determinare x in modo che l'area del trapezio $ABQR$ valga $\frac{3}{4}d^2$.
Soluzione: $x = \dfrac{\pi}{4}$.

3.6 Prova scritta del 20/07/07

1. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(2,3)$, $B(5,0)$ e $C(1,1)$.
Soluzione: $3x^2 + 3y^2 - 19x - 7y + 20 = 0$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 5} + 1 \leq x\,.$$

Soluzione: $x \in [\sqrt{5}, 3]$.

3. Dato il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ x + y = 2 \end{cases},$$

determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione (x, y) del sistema soddisfa la condizione $x = 3y$.
Soluzione: $a = \dfrac{5}{4}$.

4. Date le curve C_1 e C_2 rispettivamente di equazioni

$$3x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \quad \text{e} \quad y = x^2\,,$$

trovare l'area del poligono che ha per vertici i punti di incontro delle 2 curve e i punti di intersezione della prima con l'asse x.
Soluzione: $a = \sqrt{\dfrac{5}{3}} + 1$.

5. Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la disequazione

$$\sin^2 x - \sin x + \cos x - \sin x \cos x \geq 0\,.$$

Soluzione: $x \in \left[-\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{1}{4}\pi\right] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\pi\right\}$.

6. Siano $|\overline{AB}| = c$ e $|\overline{AC}| = 2\sqrt{6}c$ le misure dei cateti di un triangolo rettangolo. La bisettrice dell'angolo $\gamma = A\widehat{C}B$ incontra l'altezza relativa all'ipotenusa in un punto M; determinare $|\overline{AM}|$ in funzione di c.
Soluzione: $(10\sqrt{6} - 24)c$.

7. Determinare a e b in modo che il polinomio a coefficienti reali

$$P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$$

abbia $x = 1$ come radice doppia. Per questi valori semplificare la frazione

$$\frac{x^3 + ax^2 + x + b}{x^4 + 2x^2 - 3}.$$

Soluzione: $a = -2,\ b = 0$; frazione semplificata: $\dfrac{x(x-1)}{(x^2+3)(x+1)}$.

8. Risolvere rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}$, assumendo $k \in \mathbb{R}$ come parametro, l'equazione

$$kx = \sqrt{-k(1 + |x|)}.$$

Per quali valori di k l'equazione è indeterminata?

Soluzione: Se $k = 0$ l'equazione è indeterminata. Se $k < 0$ $x = \dfrac{1 + \sqrt{1-4k}}{2k}$.

9. Scrivere l'equazione della circonferenza C di centro $C(0, 1)$ e raggio $r = 1$. Se $A \neq O(0, 0)$ e B sono, rispettivamente, i punti di intersezione della retta $y = kx$ con la circonferenza C e la retta $y = 2$, determinare il funzione di $k \in \mathbb{R}$ il luogo geometrico dei punti $P(x_B, y_A)$ e calcolare k in modo che $x_B y_A \geq \sqrt{3}$. Passare infine all'equazione cartesiana del luogo richiesto.

Soluzione: $x^2 + y^2 - 2y = 0$; $\begin{cases} x = \dfrac{2}{k} \\ y = \dfrac{2k^2}{1+k^2} \end{cases}$; $k \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$; $y = \dfrac{8}{4+x^2}$.

10. Per ogni intero positivo n, risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}+2} + \frac{2\sqrt[n]{x}+3}{\sqrt[n]{x}+3} = \frac{3}{2}.$$

Soluzione: Per n pari, $x = 0$; per n dispari, $x \in \{-1, 0\}$.

3.7 Prova scritta del 5/10/07

1. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = (x-1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$$

è divisibile per $x^2 + x - 2$?

Soluzione: $a \in \{2, -2, 3\}$

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sqrt{x^2 - x + 1} > 2x^2 - 1$$

Soluzione: $x \in \left]-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$

3. Trovare la relazione tra i parametri b e c in modo che la parabola C_1 di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ passi per il vertice della parabola C_2 di equazione $y = x^2 + 2x$. Indicato con P l'altro punto comune alle due parabole, scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto medio M del segmento $\overline{VP}$.

Soluzione: $y = 2x^2 + 4x + 1$

4. Risolvere l'equazione

$$5\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzione: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

5. Sono date le funzioni $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ e $g(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2}$. Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha

a) $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$,
b) $f(x) > 0$ oppure $g(x) > 0$.

Soluzione: **a**) Nessun x; **b**) $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

6. Siano A, B, C e D i vertici consecutivi di un quadrilatero convesso inscritto nella circonferenza di diametro $|\overline{BD}| = 9a$. La tangente alla circonferenza nel punto A è perpendicolare alla retta CD e sia E il loro punto di incontro. Sapendo che

$$|\overline{EA}| = 2a\sqrt{5} \quad , \quad \overline{ED} + \overline{EC} = \overline{BD} \quad , \quad A\widehat{B}D = D\widehat{A}E\,,$$

determinare il perimetro del quadratilatero $ABCD$.

(Suggerimento: posto $|\overline{ED}| = x, \ldots$).

Soluzione: $\left(11 + 2\sqrt{14} + 3\sqrt{5}\right)a$

7. Trovare l'area del trapezio rettangolo $ABCD$ sapendo che $|\overline{AB} = 3a$, $\widehat{A} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}$, $\cos B\widehat{A}C = \frac{1}{\sqrt{13}}$ e $CB = 2HB$, essendo H la proiezione di C sulla base $\overline{AB}$.

Soluzione: $4\sqrt{3}a^2$

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \geq 0\,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Soluzione: $x \in \left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right[$

9. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{5 + 4x} < 3 + |2x|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione: $x \in \left]-\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$

10. In una circonferenza di diametro $2r$ si considerino due corde consecutive $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, di lunghezza rispettivamente r e $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, tali che l'angolo $A\widehat{B}C$ sia ottuso. Calcolare la lunghezza della corda $\overline{AC}$.

Soluzione: $|\overline{AC} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3}}\, r$

3.8 Prova scritta del 3/12/07

1. Determinare $r > 0$ in modo che l'area del quadrilatero, i cui vertici sono i punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 + (xy - x^2)^2 = 0\,,$$

sia uguale a 4.

Soluzione: $\sqrt{2\sqrt{2}}$

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$2y^2 \leq 1 + \sqrt{y^2 - y + 1}\,.$$

Soluzione: $x \in \left[-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\, 1\right]$

3. Trovare le coppie di numeri interi relativi successivi tali che, sottraendo al loro prodotto la loro somma moltiplicata per 51, si ottenga 51.

Soluzione: $(-1, 0)\,, (102, 103)$

4. Risolvere l'equazione

$$\sin x - \sin 5x = \cos 3x \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Soluzione: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{19\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}\right\}$

5. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni

$$x^3 + kx + 2 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 + x + 2k = 0$$

hanno una soluzione in comune?

Soluzione: $k = 1\,, k = -5$

6. Siano A, B, C e D i vertici consecutivi di un quadrilatero non intrecciato inscritto nella circonferenza di diametro $|\overline{BD}| = 18r$. La tangente alla circonferenza nel punto A è perpendicolare alla retta CD e sia E il loro punto di incontro. Sapendo che

$$|\overline{EA} = 4r\sqrt{5} \quad , \quad \overline{ED} + \overline{EC} = \overline{BD} \quad , \quad A\widehat{B}D = D\widehat{A}E\,,$$

determinare il perimetro del quadratilatero $ABCD$.

(Suggerimento: posto $|\overline{ED}| = x, \ldots$).

Soluzione: $\left(22 + 4\sqrt{14} + 6\sqrt{5}\right) r$

7. Sia C il centro di un cubo di spigolo $|\overline{AB}| = l$. Trovare gli angoli e i lati del triangolo ABC.

Soluzione: $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\widehat{C} = \dfrac{1}{3}$; $|\overline{AB}| = l$, $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l$

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} \leq 0\,, \quad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

Soluzione: $x \in \left]-\pi, -\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$

9. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{5 - 4x} - |2x| < 3 \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione: $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right[$

10. In una circonferenza di diametro $4d$ si considerino due corde consecutive $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, di lunghezza rispettivamente $2d$ e $\frac{4d}{\sqrt{3}}$, tali che l'angolo $A\widehat{B}C$ sia ottuso. Calcolare la lunghezza della corda $\overline{AC}$.

Soluzione: $|\overline{AC}| = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{3}}\, 2d$ o, meglio, $|\overline{AC}| = \sqrt{\dfrac{20 + 8\sqrt{6}}{3}}\, d$

3.9 Prova scritta del 17/03/08

1. Nel piano cartesiano Oxy trovare l'equazione della parabola passante per i 3 punti $A(-1, 1)$, $B(-3, 1)$ e $C(-2, 3)$. Tracciarne il grafico.

Soluzione: $y = -2x^2 - 8x - 5$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} > -1\,.$$

Soluzione: $x \in]1, +\infty[$.

3. Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$, trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto $A(0, 2)$.

Soluzione: $x = 0$; $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$.

4. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x - 1} \leq 0\,.$$

Soluzione: $x \in]-\infty, -3[\cup \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

5. La retta r passa per $A(0, 3)$ e interseca l'asse x nel punto $P(p, 0)$ in modo che la semiretta PA forma un angolo di $2\pi/3$ col semiasse positivo delle ascisse. Scrivere l'equazione di r e le coordinate del punto P.

Soluzione: $r\colon\ y = -3x + 3$; $P = (\sqrt{3}, 0)$.

6. Risolvere nell'intervallo $[0, 3\pi]$ la seguente equazione

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} - \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0\,.$$

Soluzione: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}$.

7. Il triangolo PQR è rettangolo in Q e ha i cateti di lunghezza $|\overline{PQ}| = 14$ e $|\overline{QR}| = 48$. Se M è il punto medio di $\overline{PR}$, determinare il coseno dell'angolo $M\hat{Q}P$.

Soluzione: $\cos M\hat{Q}P = \dfrac{24}{25}$.

8. Calcolare l'espressione

$$(3 + 2|x|)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

per $x = -\sqrt{2}$ e verificare che si ottiene un numero intero.

Soluzione: 1.

9. In un triangolo ABC si ha $|\overline{AC}| = a$, $|\overline{BC}| = 2a$ e $A\hat{C}B = 2\pi/3$. Calcolare $|\overline{AB}|$ e trovare il raggio della circonferenza circoscritta.

Soluzione: $|\overline{AB}| = \sqrt{7}a$, $r = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}a$.

10. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq \sqrt{3}\,.$$

Soluzione: $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$.

3.10 Prova scritta del 22/05/08

1. Ad un cerchio di centro O si conducono due tangenti dagli estremi di un suo diametro. Dette A e B le intersezioni con una terza tangente, dimostrare che il triangolo AOB è rettangolo. Inoltre, sapendo che $|\overline{OA}| = 7$ e $|\overline{OB}| = 24$, determinare il raggio del cerchio.

Soluzione: $r = \dfrac{168}{25}$.

2. Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la seguente equazione

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2}x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Soluzione: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3. Sia data la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 + 2x + 1$. Determinare e disegnare il luogo $\mathcal{L}$ dei punti medi dele corde individuate dalla parabola con le rette del fascio di centro l'origine. Infine trovare i punti di intersezione tra $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$.

Soluzione: Il luogo è costituito dai due rami della parabola $y = 2x^2+2x$, con $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. I punti di intersezione sono $(-1, 0)$ e $(1, 4)$.

4. Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \\ 2 + 3x > \sqrt{x - 2} \end{cases}.$$

Soluzione: $x = 2$.

5. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + (2k - 1)x^2 + kx + 1$$

è divisibile per $x^2 + x + 1$. Per ogni valore di k trovato scomporre in fattori il polinomio.

Soluzione: $k = 2$; $P(x) = (x^2 + x + 1)^2$

6. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x < \sqrt{3}.$$

Soluzione: $x \in \displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$.

7. Un trapezio isoscele di base maggiore $\overline{AB}$ e base minore $\overline{CD}$ è circoscritto a una circonferenza di centro O. Determinare il raggio della circonferenza, sapendo che l'angolo in A vale $\pi/3$ e che l'area del trapezio vale $24\sqrt{3}$.

Soluzione: $r = 3$.

8. Risolvere l'equazione

$$\frac{x}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

nell'insieme dei numeri reali x per cui l'equazione ha significato.

Soluzione: $x = 1$.

9. Siano dati la retta r di equazione $x - y - 1 = 0$ e il punto $A(2, 3)$. Se A' è il simmetrico di A rispetto a r, determinare l'area del triangolo OAA'.

Soluzione: Area = 5.

10. Dato il polinomio

$$P(x) = (k+3)x^2 + kx + 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che, dette x_1 e x_2 le radici di P, si abbia

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Soluzione: $k = 2$; $k = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$.

Parte III

Appendici

A Figure di riferimento

Grafico di $\sin x$**.**

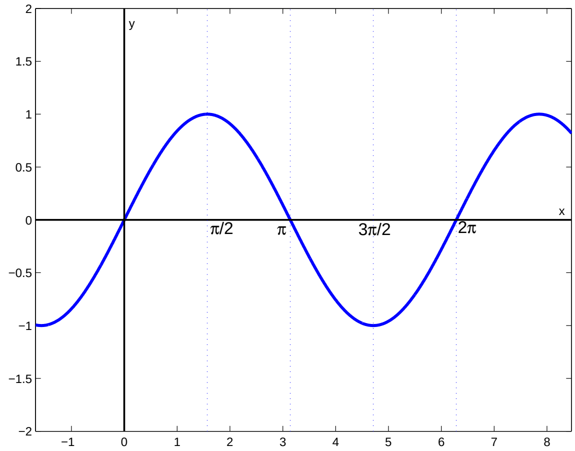


Figura A.1: $\sin(x)$

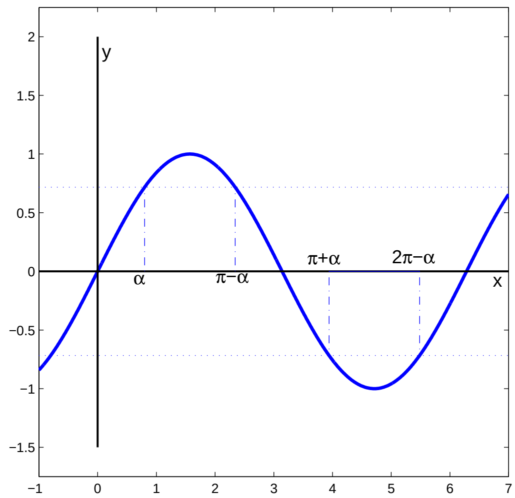


Figura A.2: $\sin(\alpha)$

Grafico di $\cos x$.

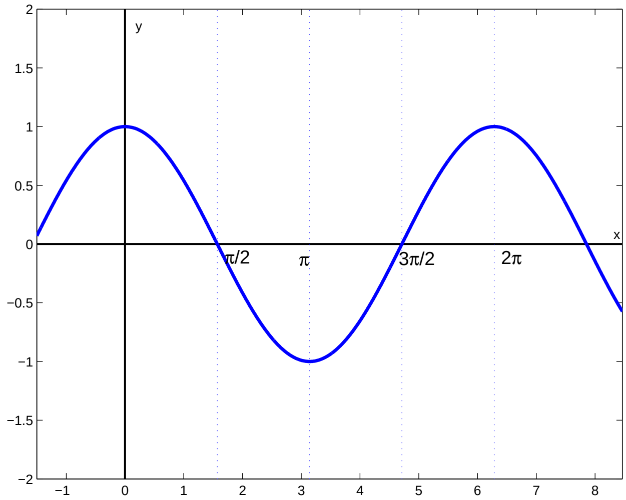


Figura A.3: $\cos x$

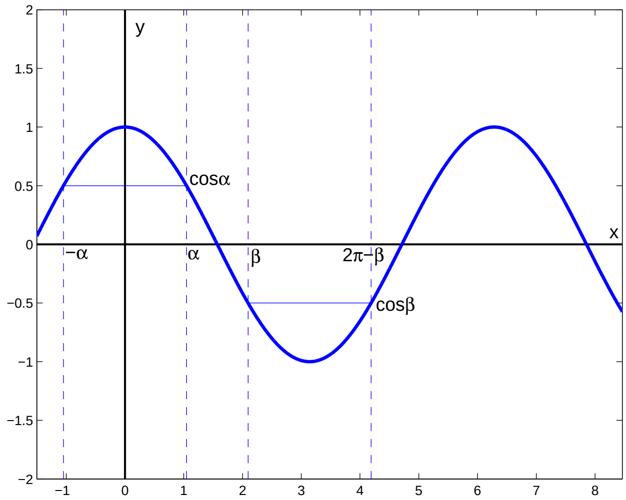


Figura A.4: $\cos x$

Grafico di tg x.

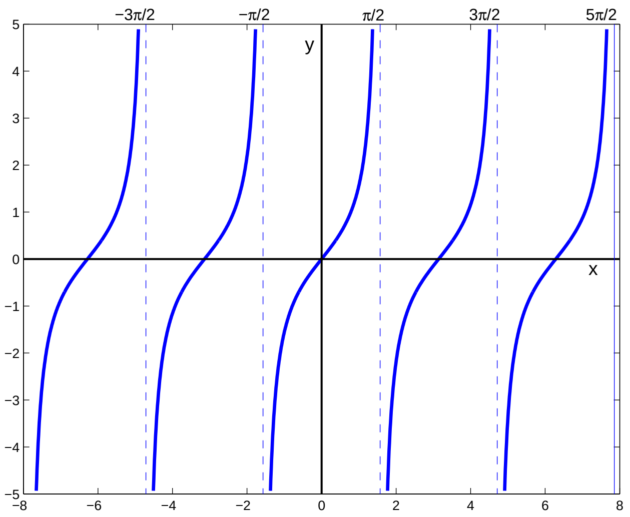


Figura A.5: tg x

Grafico di ctg x.

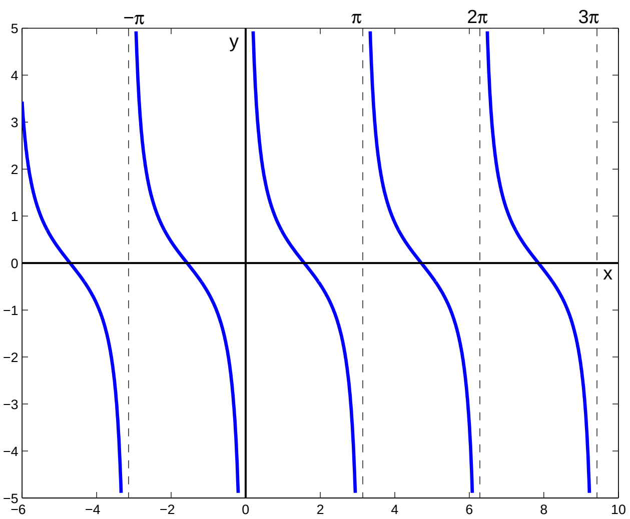


Figura A.6: ctg x

B Raccolta di alcune formule d'uso comune

B.1 Trigonometria

Formule per angoli supplementari

$$\begin{cases} \cos(\pi - \delta) = -\cos\delta \\ \sin(\pi - \delta) = \sin\delta \\ \operatorname{tg}(\pi - \delta) = -\operatorname{tg}\delta \end{cases} \qquad \forall\delta \in \mathbb{R} \text{ per cui sono ben definite le funzioni trigonometriche.}$$

Parità di seno e coseno

$$\begin{cases} \cos(-\delta) = \cos\delta \\ \sin(-\delta) = -\sin\delta \\ \operatorname{tg}(-\delta) = -\operatorname{tg}\delta \end{cases} \qquad \forall\delta \in \mathbb{R} \text{ per cui sono ben definite le funzioni trigonometriche.}$$

Formule per angoli complementari

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \sin\delta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\delta \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \operatorname{ctg}\delta \end{cases} \qquad \forall\delta \in \mathbb{R} \text{ per cui sono ben definite le funzioni trigonometriche.}$$

Formule di addizione e sottrazione per coseno e seno

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases} \qquad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Formule di di duplicazione e bisezione per coseno e seno

$$\begin{cases} \cos(2\delta) = \cos^2\delta - \sin^2\delta = 2\cos^2\delta - 1 = 1 - 2\sin^2\delta \\ \sin(2\delta) = 2\cos\delta\sin\delta \\ \cos^2\frac{\delta}{2} = \frac{1 + \cos\delta}{2} \\ \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{1 - \cos\delta}{2} \end{cases} \qquad \forall\delta \in \mathbb{R}.$$

Formule di prostaferesi

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Formule di Werner

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases} \qquad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Formule parametriche

$$\begin{cases} \sin\delta = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\delta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\delta}{2}} \\ \cos\delta = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\delta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\delta}{2}} \end{cases} \qquad \forall\delta\in(-\pi,\pi).$$

Funzioni trigonometriche di alcuni angoli notevoli.

x°	x	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$
0°	0	0	1	0
30°	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1

continua nella pagina successiva

continua dalla pagina precedente

$x°$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
$22°\,30'$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$54°$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$72°$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

B.2 Risoluzione di triangoli rettangoli

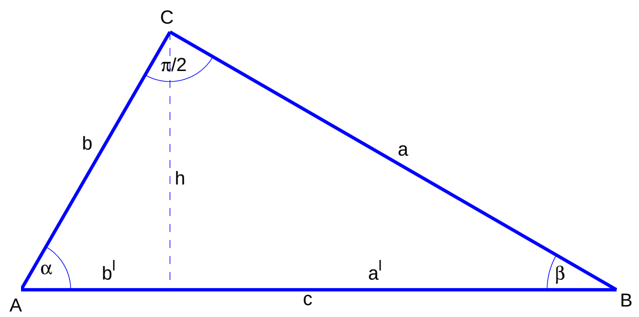


Figura B.1: triangolo rettangolo

Vale:

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$

$$b = c \cdot \sin\beta = c \cdot \cos\alpha$$

$$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta$$

$$b = a\,\mathrm{tg}\,\beta = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Teorema di Pitagora. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Primo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.

$$a^2 = a' \cdot c \quad ; \quad b^2 = b' \cdot c.$$

Secondo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo l'altezza è media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

$$h^2 = a' \cdot b'.$$

B.3 Risoluzione di triangoli generici

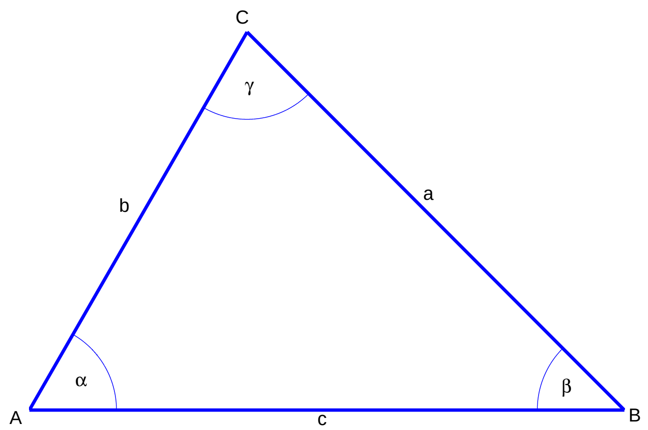


Figura B.2: triangolo generico

Disuguaglianza triangolare. Qualsiasi siano i lati a, b, c di un triangolo vale:

$$a < b + c$$

Teorema dei seni (o di Eulero). In un triangolo qualunque è costante il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto. Tale rapporto è uguale a due volte il raggio R del cerchio circoscritto al triangolo:

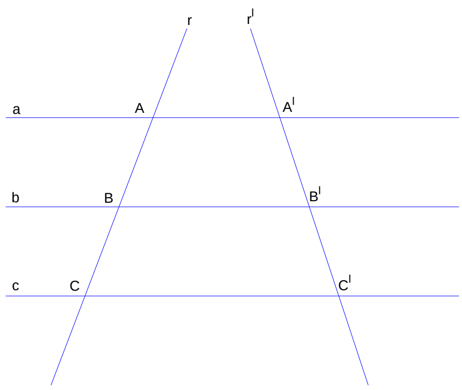
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Teorema del coseno (o di Carnot). In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Nota. Il teorema di Carnot generalizza il Teorema di Pitagora, a cui si riduce se si considera un triangolo rettangolo.

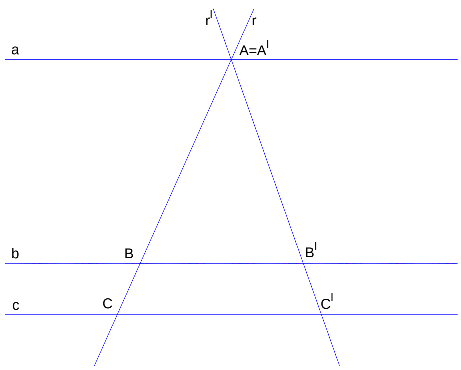
B.4 Il Teorema di Talete



Il teorema di Talete afferma che dato un fascio di rette parallele tagliate da due rette trasversali r e r', allora il rapporto tra i segmenti omologhi dell'una e dell'altra trasversale è sempre costante. Riferendoci alla figura abbiamo che

$$|\overline{AB}| : |\overline{A'B'}| = |\overline{BC}| : |\overline{B'C'}| = |\overline{AC}| : |\overline{A'C'}|.$$

Applicazione del teorema di Talete ai triangoli simili.



Dal teorema di Talete deduciamo che i triangoli ABB' e ACC' sono simili e quindi vale

$$|\overline{AB}| : |\overline{BB'}| = |\overline{AC}| : |\overline{CC'}| = |\overline{AC}| : |\overline{CC'}|$$
$$|\overline{AB'}| : |\overline{BB'}| = |\overline{AC'}| : |\overline{CC'}| = |\overline{AC}| : |\overline{CC'}|.$$